CAPITOLO XII

ANALISI FATTORIALE, DISEGNI COMPLESSI CON FATTORI INCROCIATI

12.1. Analisi fattoriale ed interazione 1

12.2. Interazione tra due fattori a più livelli 2

12.3. Rappresentazione grafica dell'interazione a due fattori 18

12.4. Analisi della varianza a due fattori con repliche ineguali 20

12.5. Il test T di Tukey per il confronto tra le medie in disegni a due fattori con repliche 23

12.6. Esperimenti fattoriali 2 x 2 e 2 x 2 x 2 con i confronti ortogonali 27

12.7. Esperimenti fattoriali con P fattori a k livelli 36

12.8. Test di Tukey per la non-additivita' con 1 df 42

12.9. Quadrati latini con repliche 53

12.10. Lettura di un tabulato informatico 58

C A P I T O L O XII

ANALISI FATTORIALE E DISEGNI COMPLESSI CON FATTORI INCROCIATI

12.1. ANALISI FATTORIALE ED INTERAZIONE

Quando si studiano due o più fattori a vari livelli, non importa se qualitativi (come diversi tipi di farmaci) o quantitativi (quali la quantità di farmaco o la classe d'età), spesso l'interesse è rivolto ad analizzare non i singoli effetti, ma **le interazioni tra i fattori**: **se, come e quanto ogni livello o modalità di un fattore interagisce con quelli degli altri fattori, esaminati in tutte le combinazioni.** Ad esempio, quando si somministra un farmaco a persone di di età e di sesso diverso, può essere di grande importanza sapere se esso ha effetti differenti, potenziati o inibiti, nei giovani rispetto agli adulti o agli anziani, nei maschi rispetto alle femmine Se non esiste interazione, il farmaco mediamente migliore sarà il più adatto per tutte le persone e potrà essere somministrato a tutti indifferentemente, in qualunque condizione; ma se esiste una sua interazione con l'età e/o con il sesso, occorre procedere ad una scelta appropriata mediante lo studio delle interazioni.

Nella ricerca ambientale, quando si confrontano i livelli d'inquinamento in varie zone di una città tenendo in considerazione anche l'ora, è probabile che le aree ad inquinamento maggiore non siano sempre le stesse, ma che presentino variazioni in rapporto alla fase del giorno. Il traffico e l'attività delle fabbriche, che non hanno la stessa intensità a tutte le ore del giorno e sono distribuiti sul territorio in modo non omogeneo, possono determinare graduatorie d'inquinamento che si modificano nel corso della giornata. Di conseguenza, anche le politiche d'intervento potranno essere diverse, se l'interazione tra zone ed ore è significativa quando si analizzano i livelli d'inquinamento.

Gli esperimenti fino ad ora analizzati nei due precedenti capitoli sull'analisi della varianza permettono di evidenziare **gli effetti principali di ogni fattore**, ai suoi diversi livelli; ma esistono anche **effetti più complessi, determinati dalla loro azione congiunta, l'interazione**.

Quando si analizzano **due fattori** (α e β), come nel disegno a blocchi randomizzati **con repliche**, si parla di **interazione di primo ordine o di interazione a due fattori** ($\alpha\beta$).

Con 3 fattori **con repliche,** si hanno

- gli **effetti principali** dei 3 fattori (α, β, γ),
- le 3 **interazioni di primo ordine** ($\alpha\beta$, $\alpha\gamma$, $\beta\gamma$) causate dall'effetto dei fattori due a due ed infine
- una **interazione di secondo ordine** ($\alpha\beta\gamma$), **determinata dall'effetto congiunto dei tre fattori**.

Quando si considerano contemporaneamente **molti fattori**, il numero delle loro combinazioni di primo ordine e di ordine superiore cresce in modo rapido; diventa difficile analizzare tutte le interazioni. Per esempio, con **4 fattori** (α, β, γ, δ) nel modello additivo dell'analisi della varianza con interazione, per ogni singolo valore X_{ijkp} è possibile stimare gli effetti di 17 quantità

$$X_{ijkp} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \delta_p + \alpha\beta_{ij} + \alpha\gamma_{ik} + \alpha\delta_{ip} + \beta\gamma_{jk} + \beta\delta_{jp} + \gamma\delta_{kp} + \alpha\beta\gamma_{ijk} + \alpha\beta\delta_{ijp} + \\ + \alpha\gamma\delta_{ikp} + \beta\gamma\delta_{jkp} + \alpha\beta\gamma\delta_{ijkp} + \varepsilon_{ijkpr}$$

dove:

- μ è la media generale;
- α_i, β_j, γ_k, δ_p sono i 4 **effetti principali** (cioè le C_4^1);
- $\alpha\beta_{ij}$, $\alpha\gamma_{ik}$, $\alpha\delta_{ip}$ $\beta\gamma_{jk}$, $\beta\delta_{jp}$, $\gamma\delta_{kp}$ sono le 6 **interazioni di primo ordine o a due fattori** (cioè le C_4^2);
- $\alpha\beta\gamma_{ijk}$, $\alpha\beta\delta_{ijp}$, $\alpha\gamma\delta_{ikp}$, $\beta\gamma\delta_{jkp}$ sono le 4 **interazioni di secondo ordine o a tre fattori** (C_4^3);
- $\alpha\beta\gamma\delta_{ijkp}$ è **l'interazione di terzo ordine o a quattro fattori** (C_4^4);
- ε_{ijkpr} è la **varianza d'errore o residuo,** misurata attraverso le differenze delle repliche rispetto alla media di casella all'incrocio tra i 4 fattori.

Con l'analisi fattoriale della varianza, è possibile fornire una misura per ognuno di questi effetti e stimare la significatività sia dei fattori principali sia delle interazioni dei vari ordini.
In questo modello additivo, si hanno

- sia **interazioni positive** (quando la presenza di un fattore potenzia l'effetto dell'altro),
- sia **interazioni negative** (quando uno o più fattori si inibiscono in modo vicendevole).

Non esiste interazione e si parla di **interazione nulla,** quando il risultato complessivo è determinato esclusivamente dalla somma dei singoli effetti principali.

12.2. INTERAZIONE TRA DUE FATTORI A PIU' LIVELLI

Per il rapido incremento della complessità dell'analisi all'aumentare del numero di fattori, lo studio dell'interazione è qui limitato ai casi più semplici. Come già avvenuto per vari altri argomenti e come sarà ripetuto anche in altri casi dei capitoli successivi, per analisi più complesse che superano le finalità di questo corso elementare si rinvia a trattazioni specifiche.
Con due fattori e con dati riportati in una tabella a due entrate, secondo le modalità già presentate nel caso di esperimenti a blocchi randomizzati, **è possibile analizzare l'interazione solo quando si dispone di più osservazioni in ognuna delle celle poste all'incrocio tra righe e colonne**.

Il modello additivo dell'ANOVA diventa

$$X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + \varepsilon_{ijk}$$

dove:

- μ **è la media generale** che, riferita ai dati dell'esperimento, è stimata nel modo migliore mediante la media campionaria di tutti i dati $\overline{\overline{X}}$
- α_i **è l'effetto del trattamento i** che, con i dati campionari, può essere calcolato come differenza della sua media dalla media generale:

$$\alpha_i = \overline{X}_i - \overline{\overline{X}}$$

- β_j **è l'effetto del blocco j** che, nell'esperimento, è determinato dalla differenza della sua media dalla media generale:

$$\beta_j = \overline{X}_j - \overline{\overline{X}}$$

- $\alpha\beta_{ij}$ **è l'interazione tra l'effetto** α **del trattamento i e l'effetto** β **del trattamento j**; con dati sperimentali, può essere misurata come somma dei quadrati delle differenze tra la media osservata e quella attesa entro ogni casella

$$\alpha\beta_{ij} = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}(\overline{X}_{ij} - \hat{X}_{ij})^2$$

dove

- $\hat{X}_{ij}$ è la media attesa e può essere calcolata sommando alla media generale l'effetto-riga e l'effetto-colonna alla quale la casella appartiene:

$$\hat{X}_{ij} = \overline{\overline{X}} + (\overline{X}_i - \overline{\overline{X}}) + (\overline{X}_j - \overline{\overline{X}}) = \overline{X}_i + \overline{X}_j - \overline{\overline{X}}$$

- ε_{ijk} **è la differenza tra una singola osservazione e la sua media di casella**:

$$\varepsilon_{ijk} = X_{ijk} - \overline{X}_{ij}$$

La devianza totale, quella tra trattamenti e quella tra blocchi sono calcolate con le stesse modalità già spiegate nel capitolo precedente.

La **devianza d'interazione** $SQ(\alpha\beta)$ secondo la formula euristica **è la somma dei quadrati degli scarti tra media osservata e media stimata in ogni casella**

$$SQ(\alpha\beta) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}(\overline{X}_{ij} - \hat{X}_{ij})^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}(\overline{X}_{ij} - \overline{X}_i - \overline{X}_j + \overline{\overline{X}})^2$$

mentre la **devianza entro od errore** $SQ(\varepsilon)$ **è la somma dei quadrati degli scarti di ogni replica dalla sua media di casella**

$$SQ(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{r}(X_{ijk} - \overline{X}_{ij})^2$$

Di conseguenza, **nel modello ANOVA a due fattori con replicazioni, la devianza totale può essere suddivisa in 4 devianze**:

- devianza del fattore α;
- devianza del fattore β;
- devianza dovuta all'effetto dell'interazione $\alpha\beta$;
- devianza d'errore o residuo.

Esse ed i loro gdl godono della proprietà additiva

$$\text{Devianza}_{\text{totale}} = \text{Devianza}_{\alpha} + \text{Devianza}_{\beta} + \text{Devianza}_{\alpha\beta} + \text{Devianza}_{\text{errore}}$$

che permette di verificare i calcoli oppure di stimare una di esse a partire dalle altre quattro.

In questo modello, di norma i dati sono riportati in una tabella secondo lo schema generale successivo. In esso,

- i trattamenti sono indicati in colonna,
- i blocchi sono indicati nelle righe,
- le repliche sono riportate nelle caselle, all'incrocio tra trattamenti e righe:

	TRATTAMENTI					
BLOCCHI	A	B	C	D	Totale di riga	Media di riga
I	X_{ij1} X_{ij2}	Repliche	Repliche	Repliche	S_{jr}	$\overline{X}_j$
II	Repliche	Repliche	Repliche	Repliche		
II	Repliche	Repliche	Repliche	Repliche		
Totale di colonna	S_{ir}				Totale S_{ijr} generale	
Media di colonna	$\overline{X}_i$					Media $\overline{\overline{X}}$ generale

e dove

- X_{ijk} **è il valore della k-esima osservazione nel livello i-esimo del fattore A (trattamento) e nel livello j-esimo del fattore B (blocco),**
- S_{ij} e $\overline{X}_{ij}$ **sono rispettivamente la somma e la media dei valori (repliche) della casella, collocata all'incrocio tra il trattamento i-esimo ed il blocco j-esimo,**

ed inoltre, con la simbologia consueta,

- S_{ir} e $\overline{X}_i$ sono la somma e la media dei valori per la colonna i del fattore A (trattamenti),
- S_{jr} e $\overline{X}_j$ sono la somma e la media dei valori per la riga j del fattore B (blocchi),
- S_{ijr} e $\overline{\overline{X}}$ sono la somma e la media generale.

Per **valutare la significatività delle differenze tra i vari livelli del fattore A e del fattore B oltre a quella dell'interazione AB**, il test F dell'analisi della varianza richiede il calcolo delle quantità riportate nella tabella sottostante, con i relativi gdl:

DEVIANZA	GDL	VARIANZA
Totale	**npr-1**	**---**
Tra medie delle caselle o tra fattori	np-1	---
Tra trattamenti o del fattore A	**n-1**	**Tra trattamenti**
Tra blocchi o del fattore B	**p-1**	**Tra blocchi**
Interazione $A \times B$	**(n-1)·(p-1)**	**Interazione**
Errore	**(r-1)·(np)**	**Errore**

- dove**,**
- **n** è il numero di livelli del fattore A;
- **p** è il numero di livelli del fattore B;
- **r** è il numero di repliche entro ogni casella.

Come per la devianza totale,
la devianza tra le medie di casella o devianza di tutti i fattori non è utile al calcolo dei test F; essa ha solo il duplice scopo di
- essere **didatticamente utile per comprendere più compiutamente il significato delle altre devianze** e
- soprattutto di permettere **calcoli più semplici per ottenere la devianza d'interazione**, mediante una semplice differenza con le devianze già note dei fattori A e B analizzati in modo separato.

La devianza totale SQ(T), definita come la somma dei quadrati degli scarti di ogni dato rispetto alla media generale, con la formula abbreviata può essere calcolata come differenza tra la somma dei quadrati di ogni dato ed il quadrato della somma generale diviso il numero totale di dati (chiamato anche termine di correzione):

$$SQ(T) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{r}(X_{ijk} - \overline{\overline{X}})^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{r}X_{ijk}^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{r}X_{ijk})^2}{npr}$$

Il numero di gdl della devianza totale è uguale al numero totale di dati od osservazioni meno uno (npr-1).

La devianza tra le medie delle caselle o **devianza dei fattori**, indicata con $SQ(\overline{X}ij)$, per definizione è la somma dei quadrati degli scarti di ogni media di casella dalla media generale, moltiplicata per il numero di dati entro ogni casella; per comprendere il significato della formula, è utile ricordare che, se esistesse solamente la variabilità tra le caselle, tutte le repliche entro ogni casella avrebbero lo stesso valore. Con la formula abbreviata, questa devianza può essere calcolata per differenza tra la somma dei quadrati delle somme dei dati entro ogni casella diviso il numero di repliche e tra il quadrato della somma generale diviso il numero totale di dati (termine di correzione):

$$SQ(\overline{X}ij) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} r(\overline{X}_{ij} - \overline{\overline{X}})^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} \frac{(\sum_{k=1}^{r} X_{ijk})^2}{r} - \frac{(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{r} X_{ijk})^2}{npr}$$

Il numero di gdl della devianza tra le medie di ogni casella è uguale al numero di caselle meno uno, corrispondente a (np-1).

La devianza tra trattamenti o **del fattore A,** indicata con SQ(A), è la somma dei quadrati degli scarti tra la media di ogni trattamento e la media generale, moltiplicata per il numero di dati del trattamento; infatti se la variabilità fosse determinata solamente dagli effetti del trattamento, tutti i dati dello stesso trattamento dovrebbero essere tra loro uguali. Con la formula abbreviata, la devianza tra trattamenti può essere calcolata per differenza tra la somma dei quadrati della somma di ogni trattamento, diviso il numero di dati del trattamento, e tra il quadrato della somma generale diviso il numero totale di dati (termine di correzione):

$$\mathrm{SQ(A)} = \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \mathrm{pr}(\overline{\mathrm{X}}_{\mathrm{i}} - \overline{\overline{\mathrm{X}}})^2 = \sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}} \frac{(\sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{p}}\sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{r}} \mathrm{X_{ijk}})^2}{\mathrm{pr}} - \frac{(\sum_{\mathrm{i=1}}^{\mathrm{n}}\sum_{\mathrm{j=1}}^{\mathrm{p}}\sum_{\mathrm{k=1}}^{\mathrm{r}} \mathrm{X_{ijk}})^2}{\mathrm{npr}}$$

La devianza tra blocchi o **del fattore B,** indicata con SQ(B) è la somma dei quadrati degli scarti tra la media di ogni blocco e la media generale, moltiplicata per il numero di dati del blocco: se la variabilità tra le osservazioni fosse determinata solamente dall'effetto del blocco, tutti i dati dello stesso blocco dovrebbero avere lo stesso valore. Con la formula abbreviata, la devianza tra blocchi può essere calcolata per differenza tra la somma dei quadrati delle somme di ogni blocco, divisa per il numero di dati del blocco, e tra il quadrato della somma generale diviso il numero totale di dati (termine di correzione):

$$SQ(B) = \sum_{j=1}^{p} nr(\overline{X}_j - \overline{\overline{X}})^2 = \sum_{j=1}^{p} \frac{(\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{r} X_{ijk})^2}{nr} - \frac{(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{r} X_{ijk})^2}{npr}$$

La devianza d'interazione tra i fattori A e B, indicata con SQ(AB), è la somma dei quadrati degli scarti di ogni media di casella rispetto al valore atteso dall'effetto trattamento e dall'effetto blocco ritenuti additivi

$$SQ(AB) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p} r(\overline{X}_{ij} - \overline{X}_i - \overline{X}_j + \overline{\overline{X}})^2$$

In modo molto più semplice e veloce**, la devianza d'interazione e i suoi gdl sono misurati per sottrazione dalla devianza tra le medie delle devianze sia del fattore A che del fattore B:**

$$SQ(AB) = SQ(\overline{X_{ij}}) - SQ(A) - SQ(B)$$

La devianza d'errore o residuo, indicata con SQ(e), **per definizione è la somma dei quadrati degli scarti di ogni valore rispetto alla media della sua casella**:

$$SQ(e) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{r}(X_{ijk} - \overline{X}_{ij})^2$$

Con r dati entro ogni casella, i suoi gdl sono $n \cdot p \cdot (r-1)$.

Più rapidamente, **la devianza d'errore è ottenuta sottraendo dalla devianza totale la devianza tra le medie delle caselle**:

$$SQ(e) = SQ(T) - SQ(\overline{X}_{ij})$$

Dividendo la devianza tra trattamenti, quella tra blocchi, quella d'interazione e quella d'errore per i rispettivi gdl si ottengono le varianze corrispondenti:

$$S_A^2 = \frac{SQ(A)}{n-1}; \qquad S_B^2 = \frac{SQ(B)}{p-1}; \qquad S_{AB}^2 = \frac{SQ(AB)}{(n-1)(p-1)}; \qquad S_e^2 = \frac{SQ(e)}{np(r-1)}$$

Nel modello ANOVA a due fattori con repliche, si possono verificare 3 ipotesi distinte ed eseguire i tre test corrispondenti.

1 - Si verifica l'ipotesi nulla di **nessuna differenza tra le medie del fattore A**:

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \ldots = \mu_n$$

contro l'ipotesi alternativa:

$$H_1: \text{non tutte le medie } \mu \text{ sono tra loro uguali}$$

mediante il test **F**, con gdl **n-1** al numeratore e **np(r-1)** al denominatore,

$$F_{(n-1),\, np(r-1)} = \frac{s_A^2}{s_e^2}$$

dove l'ipotesi nulla viene respinta se il rapporto supera il valore critico alla significatività α prescelta.

2 - Si verifica l'ipotesi nulla di **nessuna differenza tra le medie del fattore B**

$$H_0: \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \ldots = \mu_p$$

contro l'ipotesi alternativa

$$H_1: \text{non tutte le } \mu \text{ sono tra loro uguali}$$

mediante il test F con gdl **p-1** al numeratore e **np(r-1)** al denominatore

$$F_{(p-1),np(r-1)} = \frac{S_B^2}{S_e^2}$$

dove l'ipotesi nulla viene respinta se il rapporto supera il valore critico alla significatività prescelta.

3 - Si verifica l'ipotesi nulla di **nessuna interazione tra i fattori A e B** ai vari livelli

$$H_0: AB_{ij} = 0 \text{ per ogni i e j}$$

contro l'ipotesi alternativa

$$H_1: AB_{ij} \neq 0 \text{ per almeno un ij}$$

mediante il ricorso ad un test F con gdl

- **(n-1)(p-1)** al numeratore
- **np(r-1)** al denominatore

$$F_{(n-1)(p-1),np(r-1)} = \frac{S_{AB}^2}{S_e^2}$$

e si respinge l'ipotesi nulla se il rapporto supera il valore critico alla probabilità α prefissata.

ESEMPIO. Si vuole verificare se insetti adulti della stessa specie che vivono in 4 località differenti (A, B, C, D) hanno differenze significative nelle loro dimensioni, considerando pure che dalla primavera all'autunno continuano ad aumentare.

	LOCALITA'			
	A	**B**	**C**	**D**
Primavera	**45**	**63**	**70**	**48**
	50	**57**	**65**	**52**
Estate	**57**	**77**	**74**	**60**
	65	**69**	**80**	**56**
Autunno	**70**	**82**	**88**	**70**
	79	**75**	**82**	**77**

In altri termini, ci si chiede se la crescita è diversa nelle 4 località in rapporto alle stagioni (per semplificare al massimo i calcoli, sono state riportate solamente 2 misure per località e stagione).

Risposta. E' un'analisi a due fattori con repliche, con analisi dell'interazione tra località e stagioni. Dapprima si devono stimare i totali e le medie, necessari per i calcoli successivi

LOCALITA'

	A	**B**	**C**	**D**	Totali	Medie
Primavera	**45**	**63**	**70**	**48**		
	50	**57**	**65**	**52**	450	56,250
Totali	(95)	(120)	(135)	(100)		
Medie	(47,5)	(60,0)	(67,5)	(50,0)		
Estate	**57**	**77**	**74**	**60**		
	65	**69**	**80**	**56**	538	67,250
Totali	(122)	(146)	(154)	(116)		
Medie	(61,0)	(73,0)	(77,0)	(58,0)		
Autunno	**70**	**82**	**88**	**70**		
	79	**75**	**82**	**77**	623	77,875
Totali	(149)	(157)	(170)	(147)		
Medie	(74,5)	(78,5)	(85,0)	(73,5)		
Totali gen.	366	423	459	363	1611	
Medie gen.	61,00	70,50	76,50	60,50		67,125

- La devianza totale , con 23 gdl (per tutti e 24 i dati) è ottenuta con

$$(45-67{,}125)^2 + (50-67{,}125)^2 + \ldots + (70-67{,}125)^2 + (77-67{,}125)^2$$

e corrisponde a :

$$45^2 + 50^2 + \ldots + 70^2 + 77^2 - \frac{1611^2}{24} = \mathbf{3.300}$$

- La devianza tra le medie delle caselle o dei vari livelli dei due fattori, con 11 gdl (le medie delle caselle all'incrocio località per stagione sono 12) è data da

$$2(47{,}5 - 67{,}125)^2 + 2(60{,}0 - 67{,}125)^2 + \ldots + 2(73{,}5 - 67{,}125)^2$$

e corrisponde a (con i totali delle 12 caselle)

$$\frac{95^2}{2} + \frac{120^2}{2} \ldots + \frac{147^2}{2} - \frac{1611^2}{24} = \mathbf{3.052}$$

- La devianza tra trattamenti o del fattore A, con 3 gdl è calcolata (per le 4 medie di colonna) da

$$\text{Devianza}_A = 6\cdot(61{,}00 - 67{,}125)^2 + 6\cdot(70{,}50 - 67{,}125)^2 + \ldots + 6\cdot(60{,}50 - 67{,}125)^2$$

ed è uguale a (con i totali dei 4 trattamenti):

$$\text{Devianza}_A = \frac{366^2}{6} + \frac{423^2}{6} + \frac{459^2}{6} + \frac{363^2}{6} - \frac{1611^2}{24} = \mathbf{1.084}$$

- La devianza tra blocchi o del fattore B, con 2 gdl è ottenuta mediante

$$\text{Devianza}_B = 8\cdot(56{,}250 - 67{,}125)^2 + 8\cdot(67{,}250 - 67{,}125)^2 + 8\cdot(77{,}875 - 67{,}125)^2$$

e corrisponde a (con i totali dei 3 blocchi)

$$\text{Devianza}_B = \frac{450^2}{8} + \frac{538^2}{8} + \frac{623^2}{8} - \frac{1611^2}{24} = \mathbf{1.871}$$

- La devianza d'interazione AB viene stimata per differenza:

$$\text{Devianza}_{AB} = \text{Devianza}_{\text{tra medie}} - \text{Devianza}_A - \text{Devianza}_B = 3.052 - 1.084 - 1.871 = \mathbf{97}$$

e nello stesso modo vengono calcolati i rispettivi gdl

$$\text{gdl}_{AB} = \text{gdl}_{\text{tra medie}} - \text{gdl}_A - \text{gdl}_B = 11 - 3 - 2 = \mathbf{6}$$

- La devianza d'errore o residuo nei calcoli manuali viene quasi sempre stimata per differenza

$$\text{Devianza}_{\text{errore}} = \text{Devianza}_{\text{totale}} - \text{Devianza}_{\text{tra medie}} = 3.300 - 3.052 = \mathbf{248}$$

e nello stesso modo sono calcolati i suoi gdl

$$\text{gdl}_{\text{errore}} = \text{gdl}_{\text{totale}} - \text{gdl}_{\text{tra medie}} = 23 - 11 = \mathbf{12}$$

I gdl della devianza d'errore possono essere calcolati anche in modo diretto: **ognuna delle 12 caselle con 2 dati contribuisce alla devianza d'errore complessiva con 1 gdl, fornendo un totale di 12 gdl**.

E' utile disporre le devianze e i gdl in tabella, con il calcolo delle 4 varianze utili ai 3 test F:

	DEVIANZA	**GDL**	**VARIANZA**
Totale	3.300	23	---
Tra medie	3.052	11	---
Tra tratt. (A)	1.084	3	361,33
Tra blocchi (B)	1.870	2	935,50
Interazione (AB)	97	6	16,16
Errore	248	12	20,66

Per le differenze tra trattamenti o effetto del fattore A si calcola un test F con gdl 3 e 12

$$F_{3,12} = \frac{361,33}{20,66} = 17,49$$

il cui valore critico alla probabilità $\alpha = 0.05$ è uguale a 3,49.

Per le differenze tra blocchi o effetto del fattore B si calcola un test F con gdl 2 e 12

$$F_{2,12} = \frac{935,5}{20,66} = 45,28$$

il valore critico del quale alla probabilità $\alpha = 0.05$ è 3,89.

Per l'effetto dell'interazione AB si calcola un test F con gdl 6 e 12

$$F_{6,12} = \frac{16,16}{20,66} = 0,78$$

che fornisce un rapporto inferiore ad 1 e
quindi non è significativo.

Con i risultati dell'esempio, si possono trarre le conclusioni relative ai tre test F:
1 - nelle 4 località, le dimensioni medie degli insetti sono significativamente differenti;

2 - tra primavera, estate ed autunno le dimensioni medie degli insetti variano significativamente;
3 - non esiste interazione: nelle 4 località le dimensioni medie degli insetti variano con intensità simile durante le stagioni.

Il disegno sperimentale dell'analisi della varianza a più criteri è la vera novità introdotta da Fisher; su di essa si fonda la statistica moderna. Con l'assunzione che la natura risponde solamente a domande semplici, si era diffuso tra i ricercatori un metodo d'indagine che imponeva la variazione di un solo fattore sperimentale alla volta. Fisher dimostrò il vantaggio del disegno sperimentale di tipo fattoriale: **se si seguono contemporaneamente più fattori, si riesce ad evidenziare le loro interazioni e si ha una visione più corretta della complessità delle risposte. Si ottengono anche i vantaggi di poter utilizzare un numero minore di osservazioni e di ridurre sensibilmente la varianza d'errore**.

Gli esperimenti fattoriali per l'analisi dell'interazione tra 2 fattori a vari livelli sono condotti in laboratorio altrettanto spesso che nelle ricerche di campagna. Per chi non ha esperienza, l'approccio metodologico utilizzato in laboratorio appare diverso da quello impiegato in campagna, poiché i risultati spesso sono presentati in tante colonne, quante sono le combinazioni dei livelli dei due fattori a confronto, come se si trattasse di un'analisi ad un criterio di classificazione.

Con il fattore A a tre livelli (a_1, a_2, a_3) ed il fattore B a due modalità (b_1 e b_2) si devono formare 6 gruppi, date dalle loro combinazioni, **ognuno con lo stesso numero d'osservazioni**. Di norma i risultati sono riportati in una tabella che solo apparentemente è ad una sola entrata.

a_1b_1	a_1b_2	a_2b_1	a_2b_2	a_3b_1	a_3b_2
X_{111}	X_{121}	X_{211}	---	---	---
X_{112}	X_{122}	X_{212}	---	---	X_{322}
X_{113}	X_{123}	X_{213}	---	---	X_{323}
---	---	---	---	---	---

E' sufficiente una corretta impostazione tabellare come quella sottostante

	a_1	a_2	a_3
b_1	Repliche	Repliche	Repliche
b_2	Repliche	Repliche	Repliche

per rendere evidente che si tratta di un esperimento a due fattori con repliche.
E' quindi un esperimento fattoriale, con il quale è possibile analizzare contemporaneamente se esiste differenza tra le varie modalità entro ognuno dei due fattori e se l'interazione tra loro è significativa.

ESEMPIO. Si vogliono verificare gli effetti di 3 mangimi industriali, contenenti ormoni sintetici, sulla crescita di animali: un aspetto fondamentale della ricerca è dimostrare se nei due sessi hanno un effetto di segno opposto.
A questo scopo, i 3 tipi di mangime (a_1, a_2, a_3) sono stati somministrati
- a tre gruppi di femmine (b_1), formati ognuno da 5 individui scelti per estrazione casuale da un grande gruppo di femmine, e
- a tre gruppi di maschi (b_2), formati ognuno da 5 individui scelti per estrazione casuale da un grande gruppo di soli maschi.

Dopo un mese di dieta, è stato misurato l'accrescimento di ogni cavia.
Per ognuno dei gruppi, i risultati sono riportati nella tabella sottostante:

	a_1b_1	a_1b_2	a_2b_1	a_2b_2	a_3b_1	a_3b_2
	12	28	28	27	14	20
	18	32	21	29	17	17
	21	31	22	31	15	18
	25	34	25	30	18	21
	24	32	27	26	16	16
Medie	20,0	31,4	24,6	28,6	16,0	18,4

Esiste interazione tra farmaci e sesso?

Risposta. Se non già fatto nella presentazione dei risultati, soprattutto per l'apprendimento dei metodi risulta utile impostare i dati secondo una tabella che evidenzi che si tratta di un'analisi a due fattori con repliche, non di un'ANOVA ad un solo criterio di classificazione:

	a_1	a_2	a_3
b_1	12	28	14
	18	21	17
	21	22	15
	25	25	18
	24	27	16
b_2	28	27	20
	32	29	17
	31	31	18
	34	30	21
	32	26	16

Nel passaggio successivo, da essa è utile ricavare una nuova tabella con tutte le medie da analizzare:

	a_1	a_2	a_3	**Medie**
b_1	**20,0**	**24,6**	**16,0**	20,200
b_2	**31,4**	**28,6**	**18,4**	26,133
Medie	25,7	26,6	17,2	23,166

Con questi dati riassuntivi, è più semplice formulare le tre ipotesi alle quali il test permette di rispondere.

1) La prima è relativa alle medie dei tre mangimi (a_1 , a_2 , a_3) con ipotesi nulla

$$H_0: \ \mu_{a1} = \mu_{a2} = \mu_{a3}$$

ed ipotesi alternativa H_1 che le μ dei tre farmaci non sono tutte uguali.

2) La seconda ipotesi nulla è relativa alla media dei sessi (b_1 e b_2)

$$H_0: \ \mu_{b1} = \mu_{b2}$$

con ipotesi alternativa bilaterale

$$H_1: \mu_{a1} \neq \mu_{a2}$$

3) La terza ipotesi riguarda la significatività dell'interazione tra il fattore A e il fattore B, con ipotesi nulla

$$H_0: \alpha\beta = 0$$

che afferma che non esiste interazione

ed ipotesi alternativa

$$H_1: \alpha\beta \neq 0$$

che afferma che l'interazione è significativa, pure senza specificarne la direzione.

Per rispondere a questi quesiti, si deve utilizzare lo stesso schema dell'analisi a due criteri di classificazione con misure ripetute; pertanto si devono calcolare:

1 - **la devianza totale** che è fondata sugli scarti di ogni valore dalla media generale (23,1); con 30 dati, i gdl sono 29;

2 - la devianza tra le medie di casella o delle combinazioni tra i due fattori, che è fondata sugli scarti di ognuna delle 6 medie (20,0; 24,6; 16,0; 31,4; 28,6; 18,4) dalla media generale; i gdl sono 5;

3 - **la devianza dovuta al fattore A**, tra le medie dei 3 tipi di mangime (25,7; 26,6; 17,2) con 2 gdl;

4 - **la devianza dovuta al fattore B,** tra le medie dei 2 sessi (20,200; 26,133), con 1 gdl;

5 - **la devianza d'interazione AB**, mangime per sesso, ottenuta facilmente per sottrazione della devianza del fattore A più quella del fattore B dalla devianza tra le medie di casella; nello stesso modo si stimano i gdl; questa devianza stima **se le sei medie di casella sono determinate dalla somma degli effetti di riga e di colonna o se risentono in modo significativo dell'interazione;**

6 - **la devianza d'errore o residuo**, data dagli scarti di ognuna delle 30 osservazioni dalla loro media di gruppo; con 5 dati, ogni gruppo contribuisce con 4 gdl per un totale di 24 gdl (4 x 6); più rapidamente, la devianza d'errore ed i suoi gdl sono ottenuti per sottrazione della devianza tra le medie di casella dalla devianza totale.

Con le formule già presentate, si calcolano le devianze, i gdl e le varianze

	DEVIANZA	GDL	VARIANZA	F
Totale	1.128	29	---	---
Tra medie	917	5	---	---
Fattore A	**538**	**2**	**269**	30,74
Fattore B	**264**	**1**	**264**	30,17
Interazione AB	**115**	**2**	**57,5**	6,57
Errore	**210**	**24**	**8,75**	**---**

utili ai 3 test F.

Per il fattore A

$$F_{2,24} = \frac{269}{8,75} = 30,74$$

si ottiene un F con gdl 2 e 24 uguale a 30,74

mentre il valore critico alla probabilità $\alpha = 0.05$ è uguale a 3,40.

Per il fattore B,

$$F_{1,24} = \frac{264}{8,75} = 30,17$$

si ottiene un F con gdl 1 e 24 uguale a 30,17

che deve essere confrontato con un valore critico alla probabilità $\alpha = 0.05$ uguale a 4,26.

Per l'interazione A x B,

$$F_{2,24} = \frac{57,5}{8,75} = 6,57$$

il valore di F con gdl 2 e 24 è uguale a 6,57

mentre il suo valore critico alla probabilità $\alpha = 0.05$ è uguale a 3,40.

Dal confronto dei tre valori di F con i rispettivi valori critici, si possono trarre le **conclusioni relative alle tre ipotesi nulle**:

1 - i tre mangimi danno medie di accrescimento significativamente differenti;

2 - i due sessi hanno accrescimenti significativamente differenti;

3 - **l'interazione tra i due fattori (mangime e sesso) è significativo**, presumibilmente per la presenza di ormoni sintetici.

12.3. RAPPRESENTAZIONE GRAFICA DELL'INTERAZIONE A DUE FATTORI

La semplice lettura della tabella che riporta le medie di casella, quelle di riga e quelle di colonna è utile per comprendere il significato dell'interazione. Quando il test F per l'interazione non risulta significativo, la media del livello del fattore A minore (o maggiore) è tale in tutti i livelli del fattore B; viceversa, quando il test F per l'interazione **A x B** risulta significativo, la media del livello del fattore A che risulta minore (o maggiore) è tale solamente per alcuni livelli del fattore B.

Nell'esempio precedente, dove l'interazione $A \times B$ è risultata significativa, è possibile osservare che per il sesso femminile (b_1) la crescita maggiore è determinata dal trattamento con l'ormone a_2 (con media 24,6), mentre per il sesso maschile (b_2) il valore medio maggiore è determinato dal trattamento con l'ormone a_1 (con media 31,4).

	TRATTAMENTO			
SESSO	a_1	a_2	a_3	Medie
b_1	**20,0**	**24,6**	**16,0**	20,200
b_2	**31,4**	**28,6**	**18,4**	26,133
Medie	25,7	26,6	17,2	23,166

Se non esistesse interazione sesso x trattamento, ognuna delle medie dei 6 gruppi sperimentali risentirebbe solamente dell'effetto del fattore A (colonna) e del fattore B (riga) in modo additivo, secondo la relazione:

$$X_{a_i b_j} = \overline{X}_{a_i} + \overline{X}_{b_j} - \overline{\overline{X}}$$

Pertanto, se non esistesse interazione A x B, le medie dei 6 gruppi sperimentali avrebbero dovuto essere:

	TRATTAMENTO			
SESSO	a_1	a_2	a_3	Medie
b_1	***22,734***	***23,634***	***14,234***	20,200
b_2	***28,667***	***29,567***	***20,167***	26,133
Medie	25,7	26,6	17,2	23,166

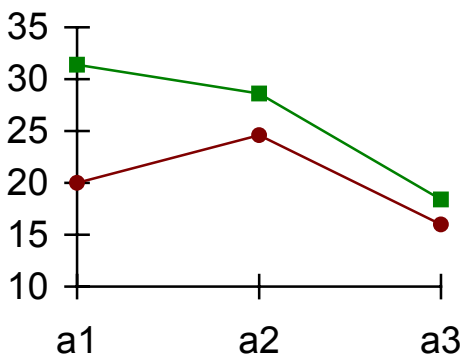
come quelli riportati nella tabella precedente.

Il trattamento che fornisce la media minore (a_3 con 17,2) determina la media minore sia nel sesso b_1 (14,234) che in quello b_2 (20,167); simmetricamente, il trattamento che causa la media maggiore (a_2 con 26,6) determina i valori medi più alti sia in b_1 (23,634) che in b_2 (29,567).

La devianza d'interazione è la somma dei quadrati degli scarti tra questi valori medi stimati ed i valori medi osservati. Poiché i valori medi stimati nelle caselle sono calcolati dai totali marginali e da quello totale, i suoi gdl sono $(n-1)\times(p-1)$**; nell'esempio riportato,** $(3-1)\times(2-1)=2$, come già calcolato utilizzando la proprietà additiva dei gdl.

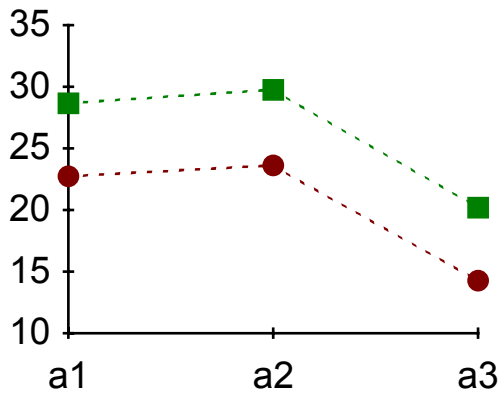
Nell'analisi di un disegno fattoriale, in genere la varianza d'interazione ha numerosi gdl. Di conseguenza, è determinata da più differenze da quanto atteso e l'interpretazione non sempre è banale, ma richiede attenzione.
Un modo semplice per evidenziare l'esistenza dell'interazione ed i suoi effetti è la rappresentazione grafica dei valori medi osservati e del suo confronto con quelli stimati. Nelle due figure sottostanti sono riportati

A



A Grafico dei valori medi osservati

B



B Grafico dei valori medi stimati (in assenza di interazione)

- nella figura A **i valori medi osservati** per il sesso b_2 (i quadrati) e per il sesso b_1 (le palline),
- nella figura B sono riportati **i valori medi stimati in assenza d'interazione**.

Quando non esiste interazione, i segmenti che uniscono i punti risultano paralleli, come nella figura B, poiché le medie sono determinate solo dagli effetti additivi del fattore A e del fattore B. Nell'esempio con i valori medi stimati (esempio B), le linee risultano esattamente parallele, poiché mancano totalmente sia la variabilità casuale sia l'interazione.

Quando esiste interazione, come nel grafico con i valori medi osservati (esempio A), le linee si allontanano sensibilmente dal parallelismo: il trattamento che risulta migliore o peggiore per un sesso non ottiene lo stesso risultato con l'altro sesso, poiché si ha un ulteriore fattore di inibizione o di potenziamento per almeno una media.

12.4. ANALISI DELLA VARIANZA A DUE FATTORI CON REPLICHE INEGUALI

Le procedure illustrate nei paragrafi precedenti per l'analisi della varianza nel caso di due fattori con repliche richiedono che **il loro numero (r) entro ogni cella sia sempre uguale**. La **potenza del test** è massima e **l'interpretazione dei risultati** è più semplice; ma nella pratica della ricerca non sempre è possibile rispettare uno schema così rigido.

Quando il numero di dati entro ogni casella **non è costante**, in un'analisi a due fattori è ancora possibile ricorrere a formule semplici, utilizzabili per calcoli manuali, se **il numero di repliche entro ogni casella è <u>proporzionale</u>**.

Come nella tabella sottostante (con 4 livelli per il fattore A e 3 livelli per il fattore B), nella quale i dati riportati (n_{ij}) in ogni casella rappresentano il numero di osservazioni,

	a_1	a_2	a_3	a_4	Totale
b_1	3	6	9	6	**24**
b_2	4	8	12	6	**32**
b_3	2	4	6	2	**16**
Totale	**9**	**18**	**27**	**18**	**72**

si può parlare di **<u>numero proporzionale di repliche</u>** quando

$$n_{ij} = \frac{n_i \cdot n_j}{N}$$

dove

- n_{ij} = numero di dati nella cella all'incrocio della riga **i** e della colonna **j**,
- n_i = numero totale di dati nella riga **i**,
- n_j = numero totale di dati nella colonna **j**,
- N = numero complessivo di osservazioni riportate nella tabella.

Nell'esempio riportato, si può parlare di numero proporzionale di repliche poiché per tutte le celle è vera la relazione precedente; ad esempio,

- in quella posta all'incrocio tra a_3 e b_2 (12),

$$12 = \frac{32 \cdot 27}{72}$$

- in quella posta all'incrocio tra a_1 e b_3 (2),

$$2 = \frac{9 \cdot 16}{72}$$

Utilizzando le formule abbreviate, in uno schema con **repliche proporzionali,** in cui

- ogni riga **i** abbia **q** livelli
- ogni colonna **j** abbia **p** livelli
- ogni **k** cella abbia un numero variabile di repliche $\mathbf{n_{ij}}$,

si stima

- **la devianza totale** SQ(T) con gdl = **N-1** (nell'esempio, **72-1 = 71**)

$$SQ(T) = \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{n_{ij}} X_{ijk}^2 - \frac{(\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{n_{ij}} X_{ijk})^2}{N}$$

- **la devianza tra le celle** $SQ(\overline{X}_{ij})$ con gdl = **q·p-1** (nell'esempio, **4 ·3 - 1 = 11**)

$$SQ(\overline{X}ij) = \sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{p} \frac{(\sum_{k=1}^{n_{ij}} X_{ijk})^2}{n_{ij}} - \frac{(\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{n_{ij}} X_{ijk})^2}{N}$$

- **la devianza del fattore A** SQ(A) con gdl = **q-1** (nell'esempio, **4-1 = 3**)

$$SQ(A) = \sum_{i=1}^{q} \frac{(\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{n_{ij}} X_{ijk})^2}{\sum_{j=1}^{p} n_{ij}} - \frac{(\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{n_{ij}} X_{ijk})^2}{N}$$

- **la devianza del fattore B** SQ(B) con gdl = **p-1** (esempio**, 3-1 = 2**)

$$SQ(B) = \sum_{j=1}^{p} \frac{(\sum_{i=1}^{q}\sum_{k=1}^{n_{ij}} X_{ijk})^2}{\sum_{i=1}^{q} n_{ij}} - \frac{(\sum_{i=1}^{q}\sum_{j=1}^{p}\sum_{k=1}^{n_{ij}} X_{ijk})^2}{N}$$

- **la devianza d'interazione** SQ(AB) con gdl = **(q·p-1) – (q-1) – (p-1) = (q-1)·(p-1)** (nell'esempio, 11 – 3 – 2 = 3 · 2 = 6)

$$SQ(AB) = SQ(\overline{X}_{ij}) - SQ(A) - SQ(B)$$

- **la devianza d'errore** SQ(e) con gdl **(N – 1) - (q · p –1);** (nell'esempio, 71 – 11 = 60)

$$SQ(e) = SQ(T) - SQ(\overline{X}_{ij})$$

Se le frequenze di osservazioni entro ogni cella non è proporzionale (l'uguaglianza del numero di repliche ne rappresenta solo un caso particolare), le formule sono più complesse e la loro applicazione diventa possibile solo con programmi informatici. E' quindi utile cercare di condurre i casi che se ne allontanano di poco allo schema del modello proporzionale,

- eliminando casualmente l'osservazione in eccesso entro le celle interessate,
- inserendo il dato mancante.

Come stimare un dato mancante nei casi più semplici è come correggere le varianze è già stato presentato nel capitolo precedente. In questo caso, G. P. **Shearer** nel 1973 (vedi l'articolo ***Missing data in quantitative designs***.pubblicato su **Journal of the Royal Statistical Society**, Ser. C Appl. Statist. 22: 135-140), ripresa da Jerrold H. **Zar** nel testo ***Biostatistical Analysis*** del 1999 (fourth edition, Prentice Hall, New Jersey),

propone di inserire il valore $\hat{X}_{ijk}$ stimato con

$$\hat{X}_{ijk} = \frac{aA_i + bB_j - \sum_{i=1}^{a}\sum_{j=1}^{b}\sum_{k=1}^{n_{ij}} Xi_{jk}}{N + 1 - a - b}$$

dove

- a = numero di livelli del fattore A (nell'esempio, è uguale a 4),
- A_i = somma di tutti i valori nel livello **i** del fattore **A** (ovviamente senza il dato mancante),
- b = numero di livelli del fattore B (nell'esempio, è uguale a 3),
- B_j = somma di tutti i valori nel livello **j** del fattore **B** (ovviamente senza il dato mancante).

Se il numero di dati mancanti è superiore a 1, ma secondo vari autori non devono superare il 10% del numero totale di osservazioni, si deve usare un metodo iterativo, già illustrato nei suoi concetti nel capitolo precedente.

Nel caso di disegni sperimentali non proporzionali, la procedura è più complessa. In tutti questi casi, la soluzione reale è demandata ai programmi informatici.

E' importante ricordare che

- **eliminare uno o più dati riduce** di altrettanto i gdl totali e della devianza d'errore, senza incidere sulle altre;
- **aggiungere uno o più dati non modifica** i gdl totali e della devianza d'errore.

12.5. IL TEST T DI TUKEY PER IL CONFRONTO TRA LE MEDIE IN DISEGNI A DUE FATTORI CON REPLICHE

Quando almeno uno dei tre test F risulta significativo, è possibile chiedersi tra quali medie si abbia una differenza effettiva, volendo confrontare quelle di riga, quelle di colonna e/o quelle di casella.

Con un numero costante di repliche entro ogni casella e molte medie, i metodi più semplici sono quelli fondati sulla differenza minima significativa. Tra essi il metodo di Tukey è utilizzato con maggior frequenza.

Con la stessa tabella dei valori del Q studentizzato già riportata, per ognuno dei tre gruppi di medie sono da considerarsi significative le differenze che risultano uguali o maggiori del valore critico T determinato da

$$T = Q_{\alpha, p, np(r\text{-}1)} \cdot \sqrt{\frac{s_e^2}{k}}$$

dove

- il primo indice (**α**) è la probabilità prescelta,
- il secondo indice (**p**) è il numero di medie a confronto simultaneo,
- il terzo indice (**np(r-1)**) è il numero di gradi di libertà della varianza d'errore (con **n** uguale al numero di medie del secondo fattore ed **r** uguale al numero di repliche),
- s_e^2 è la varianza d'errore,

- k è il numero di dati sui quali sono calcolate le medie a confronto.

Nel caso del confronto tra varie medie,
per il fattore A si utilizza la formula

$$T = Q_{\alpha,p,\,np(r\text{-}1)} \cdot \sqrt{\frac{s_e^2}{nr}}$$

per il fattore B la formula,

$$T = Q_{\alpha,n,\,np(r\text{-}1)} \cdot \sqrt{\frac{s_e^2}{pr}}$$

per le medie di casella la formula

$$T = Q_{\alpha,np,\,np(r\text{-}1)} \cdot \sqrt{\frac{s_e^2}{r}}$$

dove
- il secondo indice (p, n o np) sono il numero di medie a confronto simultaneo,
- i denominatori (nr, pr, r) sono il numero di dati sui quali sono stimate le medie a confronto.

Le tre formule di seguito riportate

$$\sqrt{\frac{s_e^2}{nr}} \quad , \quad \sqrt{\frac{s_e^2}{pr}} \quad , \quad \sqrt{\frac{s_e^2}{r}}$$

sono, nell'ordine, l'errore standard delle medie del fattore A, quello del fattore B e quello delle medie di casella.

ESEMPIO. Con i dati dell'esercizio precedente (di cui vengono riportate tutte le medie),

	TRATTAMENTO			
SESSO	a_1	a_2	a_3	Medie
b_1	**20,0**	**24,6**	**16,0**	20,200
b_2	**31,4**	**28,6**	**18,4**	26,133
Medie	25,7	26,6	17,2	23,166

nel quale con

$$S_e^2 = 8,75; \quad n = 2; \quad p = 3; \quad r = 5; \quad \alpha = 0.05$$

- per il confronto tra le medie dei tre livelli del fattore A, si utilizza il valore di

$$Q_{3,24} = 3,53$$

- per il confronto tra le medie dei due livelli del fattore B si utilizza

$$Q_{2,24} = 2,92$$

- e per le 6 medie di casella, ottenute dalle combinazioni dei tre livelli del fattore A e dei due livelli del fattore B, si utilizza

$$Q_{6,24} = 4,37$$

Il confronto **<u>tra le 3 medie del fattore A</u>** (a_1 = 25,7 a_2 = 26,6 a_3 = 17,2)

	a_1 = 25,7	a_2 = 26,6	a_3 = 17,2
a_2 = 26,6	**0,9**	---	---
a_3 = 17,2	**8,5**	**9,4**	---

determina 3 differenze (in grassetto nella tabella); di esse sono significative con probabilità P < 0.05 quelle che superano la quantità

$$T = 3,53 \cdot \sqrt{\frac{8,75}{10}} = \mathbf{3,30}$$

Risultano significative la differenza tra a_1 e a_3 (8,5) e quella tra a_2 e a_3 (9,4) mentre non è significativa la differenza tra le medie di a_1 e a_2 (0,9).

Il **<u>fattore B ha 2 medie</u>** (b_1 = 20,200 b_2 = 26,133) e quindi una sola differenza (**5,933**). Il test F ha già dimostrato che essa è significativa; tuttavia, applicando ugualmente a scopo didattico il test T di Tukey

$$T = 2,92 \cdot \sqrt{\frac{8,75}{15}} = \mathbf{2,23}$$

si dimostra che la differenza (5,933) risulta significativa, perché maggiore del valore del T calcolato (2,23).

Il test T di Tukey dimostra la sua utilità soprattutto nel caso di confronti tra più medie: con N medie il numero di confronti è

$$\frac{N \cdot (N-1)}{2}$$

Tra 6 gruppi dell'esempio, il numero di differenze è uguale a 15 $(\frac{6 \cdot 5}{2})$

(tutte riportate in grassetto nella tabella sottostante):

		a_1b_1	a_2b_1	a_3b_1	a_1b_2	a_2b_2	a_3b_2
		20,0	*24,6*	*16,0*	*31,4*	*28,6*	*18,4*
a_2b_1	*24,6*	**4,6**	---	---	---	---	---
a_3b_1	*16,0*	**4,0**	**8,6***	---	---	---	---
a_1b_2	*31,4*	**11,4***	**6,8***	**15,4***	---	---	---
a_2b_2	*28,6*	**8,6***	**4,0**	**12,6***	**2,8**	---	---
a_3b_2	*18,4*	**1,6**	**6,2***	**2,4**	**13,0***	**10,2***	---

Tra esse risultano significative alla probabilità $\alpha = 0.05$ quelle che superano la quantità

$$T = 4,37 \cdot \sqrt{\frac{8,75}{5}} = \mathbf{5,78}$$

T uguale a 5,78 (le 9 differenze con l'asterisco).

L'analisi può essere fatta contemporaneamente per più livelli di probabilità (oltre a 0.05 anche 0.01 e/o 0.001), riportando uno, due o tre asterischi vicino alle differenze che sono significative per la probabilità minore.

La rappresentazione tabellare, come quelle grafiche, permette di evitare la lunga descrizione necessaria ad elencare in modo dettagliato quali siano, e a che livello di probabilità, le differenze significative.

12.6. ESPERIMENTI FATTORIALI 2 x 2 E 2 x 2 x 2 CON I CONFRONTI ORTOGONALI

I metodi per calcolare le devianze ed i relativi gdl, nei disegni complessi a più fattori in cui si analizzano anche le interazioni, sono numerosi. In vari testi di statistica applicata dei decenni scorsi, è riportato anche il **metodo dei confronti ortogonali**; erano di grande utilità soprattutto in un periodo in cui i calcoli erano svolti manualmente, al massimo con l'aiuto delle calcolatrici da tavolo, per ridurre la probabilità di errori e abbreviare i tempi necessari. Ora, con i risultati ottenuti mediante programmi informatici, per i quali si richiede solo una corretta impostazione dell'input, diventa essenziale comprendere quali concetti sono alla base delle varie analisi, come si devono interpretare gli output e quale è l'esatto significato dei risultati ottenuti.

A questo fine, come generalizzazione dei metodi già presentati per due fattori con repliche, è utile considerare due casi semplici: un esperimento fattoriale 2 x 2 ed uno, relativamente più complesso, di 2 modalità per 3 fattori (2^3).

In **un esperimento fattoriale 2 x 2** (cioè **2 modalità x 2 fattori = 4 trattamenti**), il fattore A ed il fattore B hanno due sole modalità: assente (a_0 e b_0) e presente (a_1 e b_1) oppure dose minima (a_1 e b_1) e dose massima (a_2 e b_2); di solito i dati sono riportati in una tabella come quella sottostante

	Fattore A	
Fattore B	a_0	a_1
b_0	a_0b_0 Repliche	a_1b_0 Repliche
b_1	a_0b_1 Repliche	a_1b_1 Repliche

Questo disegno sperimentale non deve essere confuso con quello del test χ^2 in tabelle 2 x 2, che serve per valutare l'associazione, mediante il confronto di frequenze o conteggi di variabili qualitative o nominali. In questo disegno 2 x 2, entro ogni casella sono riportate non le frequenze ma tante misure quante sono le repliche.

Dai confronti tra le 4 medie o i 4 totali (poiché è richiesto un numero di repliche sempre costante), si può stimare la devianza tra trattamenti con 3 gdl; successivamente, è possibile la sua scomposizione in 3 devianze, ognuna con 1 gdl.

ESEMPIO. Con un esperimento di tossicologia sulla crescita di semi, si vogliono valutare gli effetti indipendenti e quelli congiunti di una sostanza (presenza o assenza) e di due diversi livelli di temperatura (20 gradi e 25 gradi).

A questo fine sono stati coltivati 4 gruppi di semi, ognuno con 5 unità o repliche, posti in 4 situazioni differenti:

- il primo gruppo di semi a temperatura di 20° C e senza la sostanza tossica (a_1b_1);
- il secondo gruppo alla temperatura di 20° C e con la presenza della sostanza tossica (a_2b_1);
- il terzo alla temperatura di 25° C e senza la sostanza (a_1b_2);
- il quarto alla temperatura di 25° C e con la presenza della sostanza (a_2b_2).

Dopo un mese, sono state misurate le crescite (in mm) di ogni seme:

	Sostanza (A)	
Temperatura (B)	Assente a_1	Presente a_2
b_1 (20° C)	**10**	**8**
	12	**6**
	8	**8**
	12	**5**
	9	**7**
b_2 (25 ° C)	**15**	**7**
	15	**5**
	12	**7**
	14	**8**
	13	**10**

Valutare se si è manifestato un effetto significativo dei due fattori e se tra loro esiste interazione.

Risposta. Come primo passaggio è utile calcolare le somme

GRUPPO	a_1b_1	a_2b_1	a_1b_2	a_2b_2	Totale
Somma	51	34	69	37	191

dei 4 gruppi e quella totale.

Con esse è possibile stimare:

- la devianza totale

$$(10^2 + 12^2 + 8^2 + 12^2 + \quad + 5^2 + 7^2 + 8^2 + 10^2) - 191^2/20 = 2017 - 1824 = 192{,}95$$

che risulta uguale a 192,5 ed ha 19 gdl,

- la devianza tra i 4 trattamenti

$$51^2/5 + 34^2/5 + 69^2/5 + 37^2/5 - 191^2/5 = 520{,}2 + 231{,}2 + 952{,}2 + 273{,}8 - 1824{,}05 = 153{,}35$$

che risulta uguale a 153,35 ed ha 3 gdl.

- la devianza d'errore, come somma dei quadrati delle differenze di ogni replica rispetto alla media del suo gruppo o, più rapidamente, per differenza,

$$192{,}95 - 153{,}35 = 39{,}6$$

che risulta uguale a 39,6 ed ha 16 (19-3) gdl.

La tabella di sintesi, che riporta anche il valore di F e la sua significatività,

	DEVIANZA	DF	VARIANZA	F	P
Totale	192,95	19	---	---	---
Tra Trattamenti	153,35	3	51,11	20,65	< 0.001
Errore	39,6	16	2,475	---	---

evidenzia che tra i 4 trattamenti esiste una differenza significativa.

La sua scomposizione in tre devianze, ognuna con 1 df, è possibile con una metodologia che non si discosta da quella già utilizzata, ma richiama l'approccio dei confronti ortogonali e permette di meglio comprendere sia l'effetto di ognuno dei due fattori che quello della loro interazione.

Tale regola di scomposizione della devianza tra trattamenti segue lo schema seguente

GRUPPO	a_1b_1	a_2b_1	a_1b_2	a_2b_2
Somma	51	34	69	37
Fattore A	**-1**	**+1**	**-1**	**+1**
Fattore B	**-1**	**-1**	**+1**	**+1**
Interazione AB	**-1**	**+1**	**+1**	**-1**

dove i gruppi con lo stesso segno devono essere sommati tra loro, per formare due gruppi per ogni confronto.

Per stimare **la devianza dovuta al fattore A**, tutti i dati devono essere riuniti in due soli gruppi: in uno (-1) quelli che sono indicati con a_1 (totale = 51+69 = 120) e nell'altro (+1) quelli con a_2 (totale = 34 + 37 = 71).

Se fosse vera l'ipotesi nulla (cioè se il fattore A non ha un effetto significativo), le due somme dovrebbero essere uguali (ricordando che tutti i gruppi hanno lo stesso numero di dati).

Con la formula abbreviata, tale devianza con 1 df è data da

$$\frac{120^2}{10}+\frac{71^2}{10}-\frac{191^2}{20} = 1440 + 504{,}1 - 1824{,}05 = 120{,}05$$

e risulta uguale a 120,05.

Per stimare **la devianza dovuta al fattore B**, devono essere riuniti in un gruppo (-1) quelli che sono indicati con b_1 (totale = 51 + 34 = 85) e nell'altro (+1) quelli con b_2 (totale = 69 + 37 = 106).

Una differenza tra le due somme che risulti minore (oppure maggiore) della precedente indica che l'effetto del fattore B è minore (oppure maggiore) di quello di A. Per una valutazione corretta della significatività di tali effetti, si calcola la devianza

$$\frac{85^2}{10}+\frac{106^2}{10}-\frac{191^2}{20} = 722{,}5 + 1129{,}6 - 1824{,}05 = 22{,}05$$

che risulta uguale a 22,05 ed ha 1 df.

La **devianza dell'interazione A x B** è ottenuta mediante il confronto tra la somma dei gruppi (-1) in cui A e B sono assenti o presenti in modo congiunto (a_1b_1 e a_2b_2 con totale = 51 + 37 = 88) rispetto a quella dei gruppi (+1) in cui A e B sono presenti separatamente (a_2b_1 e a_1b_2 con totale = 34 + 69 = 103).

Infatti, **se non esistesse interazione e quindi gli effetti di A e B fossero solo additivi, la somma in cui A e B compaiono separatamente dovrebbe essere uguale a quella in cui tali fattori non compaiono o sono presenti contemporaneamente** (sempre quando il numero di repliche è uguale in ogni gruppo).

La differenza tra le due somme indica anche se l'effetto è di

- **inibizione,** se la somma delle osservazioni in cui non compaiono oppure sono presenti in modo congiunto è minore,
- **potenziamento,** se questa somma è maggiore di quella dei valori in cui i due fattori sono presenti separatamente.

Con i dati dell'esempio, la devianza d'interazione è data da

$$\frac{88^2}{10}+\frac{103^2}{10}-\frac{191^2}{20} = 774{,}4 + 1060{,}9 - 1824{,}05 = 11{,}25$$

e risulta uguale a 11,25 con 1 df.

I risultati delle 3 devianze e dei valori di F con la loro significatività possono essere riportati in una tabella conclusiva, che evidenzia come la somma delle 3 devianze (A, B, AB) sia uguale a quella tra trattamenti e ne rappresenti la scomposizione.

L'effetto del fattore A, del fattore B e la loro interazione, utilizzando i dati dell'esempio sono verificati mediante un test F con df 1 e 16, il cui valore critico alla probabilità $\alpha = 0.05$ è uguale a 4,49 e alla probabilità $\alpha = 0.01$ è uguale a 8.86.

In conclusione sulla crescita dei semi, come risulta nella tabella seguente,

- la presenza della sostanza A inibisce la crescita in modo **altamente significativo** (< 0.001);
- la temperatura maggiore favorisce la crescita in modo **molto significativo** (< 0.01);
- l'alta temperatura potenzia l'effetto di riduzione del fattore A in modo **significativo** (con probabilità leggermente inferiore a 0.05)

	DEVIANZA	DF	VARIANZA	F	P
Totale	192,95	19	---	---	---
Tra Trattamenti	153,35	3	51,11	20,65	< 0.001
A	**120,05**	**1**	**120,05**	**48,50**	**<0.01**
B	**22,05**	**1**	**22,05**	**8,90**	**<0.01**
AB	**11,25**	**1**	**11,25**	**4,54**	**<0.05**
Errore	39,6	16	2,475	---	---

<u>Con 2 modalità per 3 fattori (2^3)</u>, è possibile utilizzare lo stesso schema esteso a 8 gruppi. Per un'analisi impostata sulla presenza-assenza di 3 fattori (A, B, C), si richiedono 8 gruppi bilanciati, che possono essere presentati come nell'ANOVA ad un criterio di classificazione

T R A T T A M E N T I							
$a_0b_0c_0$	$a_1b_0c_0$	$a_0b_1c_0$	$a_0b_0c_1$	$a_1b_1c_0$	$a_1b_0c_1$	$a_0b_1c_1$	$a_1b_1c_1$
Repliche	Repliche	Repliche	Repliche	Repliche	Repliche	Repliche	Repliche

Il modello è

$$X_{ijpk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_p + \alpha\beta_{ij} + \alpha\gamma_{ip} + \beta\gamma_{jp} + \alpha\beta\gamma_{ijp} + \varepsilon_{ijpk}$$

dove

- $\alpha_i, \beta_j, \gamma_p$ indicano gli **effetti principali,**
- $\alpha\beta_{ij}, \alpha\gamma_{ip}, \beta\gamma_{jp}$ indicano le **interazioni di primo ordine od interazioni a due fattori**,
- $\alpha\beta\gamma_{ijp}$ indica **l'interazione di secondo ordine o interazione a tre fattori,**
- ε_{ijpk} indica l'errore o residuo di ogni dato o replica.

La devianza totale (che con k repliche ha gdl **(8 x k) –1**),
la devianza tra trattamenti (con gdl **8-1**) e
la devianza d'errore (con gdl **8 x (k-1)**)
possono essere calcolati come nell'analisi della varianza ad un criterio.
La devianza tra trattamenti (con 7 gdl) può essere scomposta in
- 3 effetti principali,
- 3 interazioni di primo ordine,
- 1 interazione di secondo ordine

mediante una scomposizione ortogonale, rappresentata in uno schema,

FATTORI E INTERAZIONI	TRATTAMENTI							
	$a_0b_0c_0$ 0	$a_1b_0c_0$ a	$a_0b_1c_0$ b	$a_0b_0c_1$ c	$a_1b_1c_0$ $a \cdot b$	$a_1b_0c_1$ $a \cdot c$	$a_0b_1c_1$ $b \cdot c$	$a_1b_1c_1$ $a \cdot b \cdot c$
A	**-1**	**+1**	**-1**	**-1**	**+1**	**+1**	**-1**	**+1**
B	**-1**	**-1**	**+1**	**-1**	**+1**	**-1**	**+1**	**+1**
C	**-1**	**-1**	**-1**	**+1**	**-1**	**+1**	**+1**	**+1**
AB	**+1**	**-1**	**-1**	**+1**	**+1**	**-1**	**-1**	**+1**
AC	**+1**	**-1**	**+1**	**-1**	**-1**	**+1**	**-1**	**+1**
BC	**+1**	**+1**	**-1**	**-1**	**-1**	**-1**	**+1**	**+1**
ABC	**-1**	**+1**	**+1**	**+1**	**-1**	**-1**	**-1**	**+1**

dove +1 e -1 indicano i trattamenti che devono essere sommati tra loro, per formare ogni volta i due gruppi che devono essere confrontati.

La logica con cui si raggruppano i trattamenti è semplice:

- per ognuno dei 3 effetti principali (A, B, C) si sommano tra loro i trattamenti in cui il fattore è assente (-1) e quelli in cui è presente (+1);
- per le interazioni di primo ordine (AB, AC, BC) si sommano tra loro i trattamenti in cui è presente un solo fattore (-1) e quelli in cui o sono assenti entrambi o sono entrambi presenti (+1);
- per l'interazione di secondo ordine (ABC) si sommano tra loro i trattamenti in cui i tre fattori sono presenti singolarmente o tutti insieme (+1) e tra loro quelli in cui o sono tutti assenti o sono presenti a coppie (-1).

Per ognuno dei 7 confronti è possibile calcolare la devianza relativa, con 1 df, che è data da

$$\frac{(tot+)^2}{n+} + \frac{(tot-)^2}{n-} - \frac{TOT^2}{n}$$

dove

- tot + = totale del gruppo i cui trattamenti sono indicati con +
- tot - = totale del gruppo i cui trattamenti sono indicati con -
- n+ = numero complessivo delle repliche contenute nel gruppo +
- n- = numero complessivo delle repliche contenute nel gruppo -
- TOT = somma di tutti i dati
- n = numero complessivo di dati o repliche.

ESEMPIO. Per analizzare gli effetti della presenza-assenza di tre sostanze e delle loro interazioni sulla crescita di cavie, sono stati formati 8 gruppi, ognuno di 4 individui. Per un mese, ad ogni gruppo sono state somministrate con il cibo le 3 sostanze a due diversi livelli, secondo lo schema ed i risultati di seguito riportati

	TRATTAMENTI							
	0	a	b	c	$a \cdot b$	$a \cdot c$	$b \cdot c$	$a \cdot b \cdot c$
Repliche	5,6	6,7	6,9	6,5	7,8	7,4	7,6	7,6
	6,2	6,6	7,0	7,1	7,5	7,2	7,9	7,9
	4,5	7,3	7,2	5,8	6,1	6,5	6,9	6,3
	5,2	5,9	6,8	6,0	7,6	7,3	8,1	7,0
Totale	**21,5**	**26,5**	**27,9**	**25,4**	**29,0**	**28,4**	**30,5**	**28,8**

in cui le lettere dei trattamenti indicano le sostanze aggiunte nel cibo somministrato e 0 è il controllo. Calcolare la devianza tra gli 8 trattamenti e la sua scomposizione nei 7 confronti ortogonali, al fine di valutare

- gli effetti dei 3 fattori,
- le loro interazioni di primo ordine e
- quella di secondo ordine.

Risposta.

Ricordando che la somma totale dei 32 dati è uguale a 218,

la **<u>devianza tra trattamenti</u>** è data da

$$(21{,}5^2 + 26{,}5^2 + 27{,}9^2 + 25{,}4^2 + 29{,}0^2 + 28{,}4^2 + 30{,}5^2 + 28{,}8^2)/4 \; - \; 218^2/32 \; =$$

$$(462{,}25 + 702{,}25 + 778{,}41 + 645{,}16 + 841 + 806{,}56 + 930{,}25 + 829{,}44)/4 \; - \; 47524/32 \; =$$

$$1498{,}83 - 1485{,}125 = 13{,}705$$

e risulta uguale a 13,705 con 7 df.

<u>Per la sua scomposizione</u>, è utile costruire la tabella dei confronti ortogonali

	0 21,5	*a* 26,5	*b* 27,9	*c* 25,4	*ab* 29,0	*ac* 28,4	*bc* 30,5	*abc* 28,8	**Totale** +	**Totale** -	**Diff.**
A	-	+	-	-	+	+	-	+	112,7	105,3	7,4
B	-	-	+	-	+	-	+	+	116,2	101,8	14,4
C	-	-	-	+	-	+	+	+	113,1	104,9	8,2
AB	+	-	-	+	+	-	-	+	104,7	113,3	-8,6
AC	+	-	+	-	-	+	-	+	106,6	111,4	-4,8
BC	+	+	-	-	-	-	+	+	107,3	110,7	-3,4
ABC	-	+	+	+	-	-	-	+	108,6	109,4	-0,8

con i totali dei due gruppi di trattamenti segnati con + e con -.

La **devianza del fattore A**, con 1 df, riportata come prima nella tabella è data

$$\frac{112{,}7^2}{16}+\frac{105{,}3^2}{16}-\frac{218^2}{32} = 793{,}83 + 693{,}01 - 1485{,}12 = 1{,}72$$

e così ogni fattore od interazione fino a quella di secondo ordine (ABC), riportata alla fine della tabella

Per una lettura più facile e una visione d'insieme, questi risultati sono riassunti in una tabella

Fonte di variazione	DEVIANZA	DF
Tra trattamenti	**13,705**	**7**
A	**1,72**	**1**
B	**6,48**	**1**
C	**2,11**	**1**
AB	**2,32**	**1**
AC	**0,72**	**1**
BC	**0,37**	**1**
ABC	**0,02**	**1**

per evidenziare che

- la loro somma corrisponde a quella tra trattamenti (a meno delle approssimazioni dei calcoli) e
- a differenze maggiori tra i due gruppi (+ e -) corrispondono ovviamente valori di devianza maggiori.

Per stimare la significatività occorre naturalmente procedere ai test F, mediante il rapporto di ognuna delle 7 varianze con la varianza d'errore.

12.7. ESPERIMENTI FATTORIALI CON P FATTORI A K LIVELLI

Con **p** fattori a **k** livelli, il modello additivo dei vari fattori e delle loro interazioni resta immutato, nei principi e nelle modalità di interpretazione, rispetto a quello presentato per esperimenti $\mathbf{2^3}$; ma diventa più complesso il calcolo delle devianze. Come dimostrazione, facilmente estensibile a un esperimento di dimensioni superiori, si può utilizzare un esempio a tre fattori, di cui

- il primo (A) a 3 livelli,
- il secondo (B) a 4 livelli,
- il terzo (Sesso) a 2 livelli o modalità

con tre repliche per ognuno dei 24 (3 x 4 x 2) gruppi e quindi 72 dati.

Per **gli effetti principali**, il calcolo delle devianze è identico a quello già ripetutamente presentato.

Per **l'interazione tra due fattori**, si crea una tabella a due entrate di somme e si calcola la devianza relativa; per ottenere la devianza d'interazione e i suoi df, si sottraggono a questa ultima devianza quelle stimate per i singoli fattori.

Per **l'interazione a tre fattori**, si costruisce la tabella a tre entrate delle somme e si calcola la devianza relativa. Per ottenere la devianza d'interazione dei 3 fattori, al valore precedentemente calcolato si sottraggono sia le 3 devianze d'interazione a due fattori che le 3 degli effetti principali.
Per i df si segue lo stesso metodo.

Con i dati

	a_1		a_2		a_3	
	M	F	M	F	M	F
b_1	1,3 1,5 1,1	1,1 0,9 0.9	1,4 1,7 1,4	1,2 1,5 1,0	1,1 1,2 0,9	0,9 0,8 0,5
b_2	1,7 1,6 1,9	0,5 0,8 1,1	1,9 2,1 2,0	1,0 1,7 1,2	1,4 1,5 1,2	1,1 1,2 1,0
b_3	1,1 1,1 1,4	0,8 0,7 0,8	1,5 1,7 1,2	0,5 0,6 0,9	1,5 1,2 1,7	0,9 0,7 0,9
b_4	1,2 1,5 1,3	0,9 1,3 1,0	1,9 2,3 2,1	0,9 1,1 1,3	1,4 1,2 1,0	1,2 1,3 1,2

- la **devianza totale** è ottenuta come al solito a partire dagli scarti di ogni valore dalla media generale o con la formula abbreviata; il suo valore è 11,1329 ed ha 71 df;

- la **devianza del fattore A** è ottenuta dal confronto delle 3 medie di colonna: è uguale a 1,3086 ed ha 2 df;

- la **devianza del fattore B** è ottenuta dal confronto delle 4 medie di riga: è uguale a 1,2850 ed ha 3 df;

- la **devianza del fattore sesso** è ottenuta dal confronto tra le 2 medie relative: è uguale a 4,4006 ed ha 1 df.

Successivamente,

- per **la devianza d'interazione AB,** si deve dapprima calcolare la tabella delle somme dei fattori A e B, ignorando la distinzione tra sessi.

	a_1	a_2	a_3	Totali
b_1	**6,8**	**8,2**	**5,4**	20,4
b_2	**7,6**	**9,9**	**7,4**	24,9
b_3	**5,9**	**6,4**	**6,9**	19,2
b_4	**7,2**	**9,6**	**7,3**	24,1
Totali	27,5	34,1	27,0	88,6

Mediante le 12 somme (ognuna è la somma di 6 valori, 3 per ogni sesso come evidenziato nella tabella dei dati sperimentali) riportate nelle caselle all'incrocio dei 3 livelli di A e dei 4 livelli di B, si ottiene
- la **devianza tra le medie dei 12 trattamenti**
$(6{,}8^2 + 7{,}6^2 + 5{,}9^2 + 7{,}2^2 + 8{,}2^2 + 9{,}9^2 + 6{,}4^2 + 9{,}6^2 + 5{,}4^2 + 7{,}4^2 + 6{,}9^2 + 7{,}3^2)/6 - 88{,}6^2/72 =$
$(46{,}24 + 57{,}76 + 34{,}81 + 51{,}84 + 67{,}24 + 98{,}01 + 40{,}96 + 92{,}16 + 29{,}16 + 54{,}76 + 47{,}61 + 53{,}29)/6 -$
$7849{,}96/72 = 673{,}79/6 - 7849{,}96/72 = 112{,}3066 - 109{,}0272 = 3{,}2794$
che risulta uguale a 3,2794 con 11 df.

La **<u>devianza d'interazione A x B</u>** ed i suoi df sono stimati mediante la differenza

Dev. tra i trattamenti AB - Dev. A - Dev. B = Dev. d'interazione A x B

che, con i dati dell'esempio,

$$3{,}2794 - 1{,}3086 - 1{,}2850 = 0{,}6858$$

risulta uguale a 0,6858 con

$$11 - 2 - 3 = 6$$

6 df.

Come già dimostrato nei paragrafi precedenti con 2 fattori, questa devianza può essere ottenuta mediante la somma degli scarti al quadrato tra le 12 medie osservate e le medie attese, nell'ipotesi che non esista interazione. Poiché le medie attese sono stimate dai totali marginali, nella tabella sopra-riportata di dimensioni 4 x 3 i df dell'interazione sono 3 x 2 = 6 come ottenuto mediante il metodo delle differenze.

Questo metodo può essere esteso alle 2 devianze d'interazione successive.

Per misurare **la <u>devianza d'interazione A x Sesso</u>**, si devono dapprima calcolare le somme relative a questi due fattori, come nella tabella sottostante, ignorando l'effetto del fattore B

	a_1	a_2	a_3	Totali
M	**16,7**	**21,2**	**15,3**	53,2
F	**10,8**	**12,9**	**11,7**	35,4
Totali	27,5	34,1	27,0	88,6

La **devianza dei trattamenti** riportati nelle 6 caselle, in cui ogni valore è la somma di 12 osservazioni (4 trattamenti per 3 repliche), con la formula abbreviata è

$$(16{,}7^2 + 10{,}8^2 + 21{,}2^2 + 12{,}9^2 + 15{,}3^2 + 11{,}7^2)/12 - 88{,}6^2/72 =$$

$$(278{,}89 + 116{,}64 + 449{,}44 + 166{,}41 + 234{,}09 + 136{,}89)/12 - 7849{,}96/72 =$$

$$1382{,}36/12 - 7849{,}96/72 = 115{,}1967 - 109{,}0272 = 6{,}1695$$

e risulta uguale a 6,1695 con 5 df.

La **devianza d'interazione A x Sesso** e i suoi gdl sono ottenuti rapidamente per differenza

Dev. dei trattamenti A x Sesso - Dev. A - Dev. Sesso = Dev. d'interazione A x Sesso

Con i dati dell'esempio,

$$6{,}1695 - 1{,}3086 - 4{,}4006 = 0{,}4603$$

si ottiene una devianza d'interazione uguale a 0,4603 con

$$5 - 2 - 1 = 2$$

2 df.

Nello stesso modo, per **<u>la devianza d'interazione B x Sesso</u>** si costruisce la tabella relativa, in cui i dati delle 8 caselle sono le somme di 9 dati (3 livelli del fattore A per 3 repliche)

	b_1	b_2	b_3	b_4	Totali
M	**11,6**	**15,3**	**12,4**	**13,9**	53,2
F	**8,8**	**9,6**	**6,8**	**10,2**	35,4
Totali	20,4	24,9	19,2	24,1	88,6

La **devianza dovuta alle differenze tra le 8 medie di casella** con la formula abbreviata

$$(11,6^2 + 8,8^2 + 15,3^2 + 9,6^2 + 12,4^2 + 6,8^2 + 13,9^2 + 10,2^2)/9 - 88,6^2/72 =$$

$$(134,56 + 77,44 + 234,09 + 92,16 + 153,76 + 46,24 + 193,21 + 104,04)/9 - 7849,96/9 =$$

$$1035,5/9 - 7849,96/72 = 115,0556 - 109,0272 = 6,0284$$

risulta uguale a 6,0284 e i suoi df sono 7.

La **devianza d'interazione B x sesso**, ottenuta per differenza,

Dev. dei trattamenti B x sesso - Dev. B - Dev. sesso = Dev. d'interazione B x sesso

con i dati dell'esempio

$$6,0284 - 1,285 - 4,4006 = 0,3428$$

risulta uguale a 0,3428 e i suoi df

$$7 - 3 - 1 = 3$$

sono 3.

Per **<u>l'interazione di secondo ordine o a 3 fattori</u>** occorre costruire la tabella a 3 fattori

	MASCHI		
	a_1	a_2	a_3
b_1	3,9	4,5	3,2
b_2	5,2	6,0	4,1
b_3	3,6	4,4	4,4
b_4	4,0	6,3	3,6

	FEMMINE		
	a_1	a_2	a_3
b_1	2,9	3,7	2,2
b_2	2,4	3,9	3,3
b_3	2,3	2,0	2,5
b_4	3,2	3,3	3,7

per la quale sono possibili varie soluzioni, tra cui quella sotto-riportata, in due passaggi :

1 - La **devianza che considera contemporaneamente le medie dei 3 fattori** (ognuno con 3 repliche) con la formula abbreviata

$$(3,9^2 + 5,2^2 + 3,6^2 + 4,0^2 + 4,5^2 + 6,0^2 + 4,4^2 + 6,3^2 + 3,2^2 + 4,1^2 + 4,4^2 + 3,6^2 + 2,9^2 + 2,4^2 +$$
$$2,3^2 + 3,2^2 + 3,7^2 + 3,9^2 + 2,0^2 + 3,3^2 + 2,2^2 + 3,3^2 + 2,5^2 + 3,7^2)/3 - 88,6^2/72 =$$

$$355,04/3 - 7849,96/72 = 118,3467 - 109,0272 = 9,3195$$

risulta uguale a 9,3195 ed ha 23 df.

2 - La devianza d'interazione dei tre fattori è ottenuta per sottrazione da questa ultima stima di tutte le precedenti già stimate

Dev. tra medie di caselle - (Dev. A + Dev. B + Dev. Sesso + Dev. A x B +
+ Dev. A x Sesso + Dev. B x Sesso) = Dev. A x B x Sesso

Con i dati dell'esempio,

$$9{,}3195 - (1{,}3086 + 1{,}2850 + 4{,}4006 + 0{,}6858 + 0{,}4603 + 0{,}3428\ ) = 0{,}8634$$

risulta uguale a 0,8634

e i suoi df

$$23 - (3 + 2 + 1 + 2 + 3 + 6) = 6$$

sono 6.

Per una visione generale ed una sintesi, i risultati ottenuti dai calcoli qui presentati sono di norma riportati in una tabella riassuntiva:

FATTORI e INTERAZIONI	DEVIANZA	DF	F	Pr > F
TOTALE	**11,1328**	**71**	**---**	**---**
TRA CASELLE A x B x sesso	**9,3195**	**23**	**10,73**	**0.0001**
FATTORE A	**1,3086**	**2**	**17,32**	**0.0001**
FATTORE B	**1,2850**	**3**	**11,34**	**0.0001**
FATTORE SESSO	**4,4006**	**1**	**116,49**	**0.0001**
TABELLA A x B	3,2794	11	---	---
INTERAZIONE A x B	**0,6858**	**6**	**3,03**	**0.0137**
TABELLA A x SESSO	6,1695	5	---	---
INTERAZIONE A x SESSO	**0,4603**	**2**	**6,09**	**0.0044**
TABELLA B x SESSO	6,0284	7	---	---
INTERAZIONE B x SESSO	**0,3428**	**3**	**3,02**	**0,0385**
INTERAZIONE A x B x SESSO	**0,8364**	**6**	**3,69**	**0.0043**
ERRORE	**1,8133**	**48**	**---**	**---**

in cui i dati non in grassetto (quelli riferiti alle tabelle a due fattori) non sono riportate negli output dei programmi informatici, in quanto utili solo al calcolo manuale.
Gli unici dati riferiti a una tabella che vengono riportati sono quelli della tabella dei 3 fattori, poiché tutte le devianze successive sono una sua scomposizione.
Per l'interpretazione delle interazioni è utile ricorrere alle tabelle relative in cui sono riportate le medie osservate e quelle attese nell'ipotesi di assenza d'interazione, oppure alla rappresentazione grafica, come già illustrato nei paragrafi precedenti.

12.8. TEST DI TUKEY PER LA NON-ADDITIVITA' CON 1 DF

Nell'ANOVA a due o a più criteri di classificazione, in varie situazioni non è possibile disporre di repliche, ma di **un dato solo** per cella. Nel caso più semplice di due soli fattori (A e B), come precedentemente illustrato, il **modello additivo o lineare** è

$$X_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + R_{ij}$$

dove R_{ij} ingloba

- sia la **variabilità d'errore vera e propria**, comprendente errori di misura, variabilità biologica allo stimolo e soprattutto gli altri fattori non considerati,
- sia la **variabilità d'interazione** $\alpha\beta_{ij}$,

poiché in questo disegno sperimentale le due diverse quote non sono tra loro distinguibili mediante i metodi classici, illustrati in precedenza.
Con

- **k** livelli dei trattamenti e
- **p** livelli dei blocchi,

la metodologia ANOVA classica permette di scomporre le devianze e i rispettivi gdl secondo lo schema

Devianza	DF	Varianza
Totale	N-1	---
Tra Trattamenti	k-1	$s^2_{tratt.}$
Tra Blocchi	p-1	$s^2_{blocchi}$
Errore	(k-1)·(p-1)	s^2_e

Se esiste interazione (s_{AB}^2), la varianza d'errore (s_e^2) diventa maggiore di quella reale. Ne deriva che più difficilmente con i due test **F** risultano significative le differenze tra

- le **medie dei trattamenti**,
- **le medie dei blocchi**.

Soprattutto è in discussione la stessa validità di questi test **F**, poiché

- il modello additivo o lineare non è più valido,
- e/o i residui non sono più distribuiti normalmente.

E' possibile ricostruire le condizioni di validità attraverso la **trasformazione dei dati**, nella parte finale del capitolo. Ma per una corretta valutazione dei suoi effetti, è necessario quantificare e verificare l'esistenza di questo tipo di interazione prima e dopo la trasformazione effettuata. Si parla perciò di **non-additività trasformabile** (***transformable non-additivity***). Se essa persiste anche dopo vari tentativi, eventualmente con l'aiuto del test di **Box-Cox** per cercare quella più adeguata, è in discussione la validità del test **F**.

Nel 1949 John W. **Tukey** (con l'articolo ***One degree of freedom for non additivity***, pubblicato su **Biometrics** vol. 5, pp. 232-242) propone un metodo che

- quantifica questa devianza d'interazione,
- che a 1 df, sottraendolo a quella d'errore.

In una ANOVA a due criteri senza repliche, nel caso di interazione il modello diventa

$$x_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + D\alpha\beta_{ij} + \varepsilon_{ij}$$

Utilizzando la simbologia consueta, è possibile ottenere una stima dell'interazione $\hat{D}$, con la formula

$$\hat{D} = \frac{\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p}\left(\overline{X}_i - \overline{\overline{X}}\right)\cdot\left(\overline{X}_j - \overline{\overline{X}}\right)\cdot X_{ij}}{\sum_{i=1}^{k}\left(\overline{X}_i - \overline{\overline{X}}\right)^2 \cdot \sum_{j=1}^{p}\left(\overline{X}_j - \overline{\overline{X}}\right)^2}$$

che, seppure nella forma abbreviata, riesce ad evidenziare come l'analisi sia concentrata sugli scarti delle medie di riga e di colonna dalla media generale.

Da $\hat{D}$, si perviene alla devianza d'interazione SQ_{AB} con

$$SQ_{AB} = \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p}\hat{D}^2 \cdot \left(\overline{X}_i - \overline{\overline{X}}\right)\cdot\left(\overline{X}_j - \overline{\overline{X}}\right)$$

Sottraendo alla devianza d'errore SQ_e con df (k-1)·(p-1)

- la devianza d'interazione SQ_{AB} con 1 df,
- si ricava la devianza d'errore rimanente o Residuo $SQ_{\mathrm{Re}m}$ (da ***Remainder,*** così chiamata in vari testi; chiamata ***Balance*** come da Tukey nell'articolo citato)

$$SQ_{\mathrm{Re}m} = SQ_e - SQ_{AB}$$

I gradi di libertà della $SQ_{\mathrm{Re}m}$ sono (k-1) · (p-1) - 1 = **k · p – k - p**

In questo disegno sperimentale, la tabella completa delle devianze, dei gdl e delle varianze diventa

Devianza	DF	Varianza
Totale	N-1	---
Tra Trattamenti	k-1	$s^2_{tratt.}$
Tra Blocchi	p-1	$s^2_{blocchi}$
Errore	**(k-1)·(p-1)**	s^2_e
Interazione AB	**1**	s^2_{AB}
Remainder	**k·p-k-p**	$s^2_{\mathrm{Re}m}$

(**Errore** e **Remainder** sono sinonimi; qui i due termini sono stati distinti, per evidenziare la diversa fonte d'errore che essi indicano,

Infine, si verifica se l'interazione è significativa.
In modo più formale, si testa l'ipotesi nulla

H_0: D = 0 (non esiste l'interazione tra i fattori A e B)

contro l'ipotesi alternativa bilaterale

H_1: D ≠ 0 (esiste interazione tra i fattori A e B)

Con la solita metodologia, avviene con il test **F**

$$F_{1,k\cdot p-k-p} = \frac{s^2_{AB}}{s^2_{\mathrm{Re}m}}$$

cioè il rapporto tra

- la varianza d'interazione o della non-additivita trasformabile e
- la varianza remainder o balance,
- con df che rispettivamente sono **1** e **k·p – k - p**
- per la probabilità α prescelta.

Questa probabilità spesso è superiore a 0.05, potendo ricorre a **α = 0.10** oppure **α = 0.20**.

Se il test risulta significativo, è necessario applicare una trasformazione, in modo da annullare o ridurre la devianza d'interazione. Se essa resta significativa, l'ANOVA classica non è valida, comunque ha una potenza molto bassa.

In merito al test di verifica dell'interazione, permangono le perplessità già ripetutamente espresse per i test di omoschedasticità, dove si deve dimostrare che l'ipotesi nulla è vera: **non rifiutare l'ipotesi nulla, non significa che essa sia vera**.

La scelta conclusiva sulla attendibilità del test è quindi lasciata allo sperimentatore, che meglio conosce l'esistenza o meno della **non-additività** tra i fattori considerati e quindi sa distinguere tra un risultato accidentale e l'esistenza di un fenomeno reale. Come concetto molto generale, ritorna il problema che non è possibile separare l'analisi statistica dalla conoscenza esatta dello specifico problema ambientale, ecologico o biologico in discussione.

Nel suo articolo del 1949 Tukey ipotizzava che questa tecnica sarebbe stata facilmente estesa ad altri disegni sperimentali più complessi, data **l'importanza del concetto di non-additività** nelle condizioni di validità dell'ANOVA. In realtà nei testi internazionali a maggior diffusione compare solamente questa applicazione ai blocchi randomizzati; in quasi tutti i programmi informatici neppure questa. E' quindi una verifica di validità che nella prassi della ricerca è quasi sempre dimenticata, seppure ritenuta importante nelle enunciazioni teoriche.

Gli esempi successivi sono tratti da testi a grande diffusione internazionale. E' la logica sulla quale è stato costruito questo corso: illustrare in modo semplice ed applicativo le procedure riportate nei testi di riferimento dei rapporti scientifici e delle pubblicazioni internazionali.

ESEMPIO 1 (CON METODO DI TUKEY). Nel testo di G. **Box**, W. **Hunter** e S. **Hunter** del 1978 (***Statistics for Experimenters. An Introduction to Design, data Analysis and Model Building***, John Wiley & Sons, New York, pp. 653) è presentato sinteticamente un esempio che, sviluppato in tutti i suoi passaggi, permette di comprendere la logica del metodo. E' simile a quello riportato nell'articolo di Tukey, dove sono esposti concetti e metodologia.

In un esperimento con 4 trattamenti e 5 blocchi, con i valori osservati (X_{ij})

		TRATTAMENTI				
B L O C C H I		A	B	C	D	Media $\overline{x}_j$
	I	**89**	**88**	**97**	**94**	92
	II	**84**	**77**	**92**	**79**	83
	III	**81**	**87**	**87**	**85**	85
	IV	**87**	**92**	**89**	**84**	88
	V	**79**	**81**	**80**	**88**	82
	Media $\overline{x}_i$	84	85	89	86	$\overline{\overline{x}} = 86$

l'ANOVA a due criteri di classificazione ha dato i risultati seguenti

Devianza		DF	Varianza
Totale	560	19	----
Tra Trattamenti	70	3	23,3
Tra Blocchi	264	4	66,0
Errore	226	12	18,8

Se non esiste interazione né variabilità casuale, **i valori attesi** ($\hat{X}_{ij}$) in ogni casella sono determinati solo dall'effetto dei due fattori considerati; quindi da

$$\hat{X}_{ij} = \overline{\overline{X}} + (\overline{X}_i - \overline{\overline{X}}) + (\overline{X}_j - \overline{\overline{X}}) = \overline{X}_i + \overline{X}_j - \overline{\overline{X}}$$

e risultano

		TRATTAMENTI				
B L O C C H I		A	B	C	D	Media $\overline{x}_j$
	I	**90**	**91**	**95**	**92**	92
	II	**81**	**82**	**86**	**83**	83
	III	**83**	**84**	**88**	**85**	85
	IV	**86**	**87**	**91**	**88**	88
	V	**80**	**81**	**85**	**82**	82
	Media $\overline{x}_i$	84	85	89	86	$\overline{\overline{x}} = 86$

La differenza tra i precedenti valori osservati (X_{ij}) e questi valori attesi $(\hat{X}_{ij})$ determina i residui

		TRATTAMENTI				
B		A	B	C	D	Totale
L	I	-1 **(1)**	-3 **(9)**	2 **(4)**	2 **(4)**	
O	II	3 **(9)**	-5 **(25)**	6 **(36)**	-4 **(16)**	
C	III	-2 **(4)**	3 **(9)**	-1 **(1)**	0 **(0)**	
C	IV	1 **(1)**	5 **(25)**	-2 **(4)**	-4 **(16)**	
H	V	-1 **(1)**	0 **(0)**	-5 **(25)**	6 **(36)**	
I	Totale					**0 (226)**

La somma dei quadrati di questi valori (riportati tra parentesi e in grassetto) corrisponde alla devianza d'errore (SQe), uguale a 226 e con 12 gdl (5-1)·(4-1)

La **devianza d'errore** (SQe) è scomponibile in

- una **devianza di non-additività trasformabile** ($SQ_{Non-Add.}$) con 1 gdl e
- una **devianza rimanente** (*remainder* o *balance*) ($SQ_{\mathrm{Re}m}$) con 11 gdl.

Per ottenere la **devianza della non-additività** ($SQ_{Non-Add.}$) si utilizza il quadrato (q_{ij}) dei valori attesi ($\hat{X}_{ij}^2$) calcolati in precedenza,

$$q_{ij} = x_{ij}^2$$

		TRATTAMENTI				
B L O C C H I		A	B	C	D	Media $\overline{q}_j$
	I	**8100**	**8281**	**9025**	**8464**	8467,5
	II	**6561**	**6724**	**7396**	**6889**	6892,5
	III	**6889**	**7056**	**7744**	**7225**	7228,5
	IV	**7396**	**7569**	**8281**	**7744**	7747,5
	V	**6400**	**6561**	**7225**	**6724**	6727,5
	Media $\overline{q}_i$	7069,2	7238,2	7934,2	7409,2	$\overline{\overline{q}}$ =7412,7

procedendo con essi come è stato fatto con i valori osservati (X_{ij}):

- prima si calcolano le medie di colonna ($\overline{q}_i$), di riga ($\overline{q}_j$) e totale ($\overline{\overline{q}}$)
- successivamente da esse si ricavano i valori attesi ($\hat{q}_{ij}$).

Dalla media di colonna ($\overline{q}_i$), di riga ($\overline{q}_j$) e totale ($\overline{\overline{q}}$), attraverso la relazione

$$\hat{q}_{ij} = \overline{q}_i + \overline{q}_j - \overline{\overline{q}}$$

si ottiene una nuova tabella di valori attesi

		TRATTAMENTI				
B L O C C H I		A	B	C	D	Media $\overline{q}_j$
	I	**8124**	**8293**	**8989**	**8464**	8467,5
	II	**6549**	**6718**	**7414**	**6889**	6892,5
	III	**6885**	**7054**	**7750**	**7225**	7228,5
	IV	**7404**	**7573**	**8269**	**7744**	7747,5
	V	**6384**	**6553**	**7249**	**6724**	6727,5
	Media $\overline{q}_i$	7069,2	7238,2	7934,2	7409,2	$\overline{\overline{q}}$ =7412,7

Infine quella delle differenze tra le due distribuzioni ($q_{ij} - \hat{q}_{ij}$) e i loro quadrati (tra parentesi)

		TRATTAMENTI				
B		A	B	C	D	Totale
L	I	-24 **(576)**	-12 **(144)**	36 **(1296)**	0 **(0)**	
O	II	12 **(144)**	6 **(36)**	-18 **(324)**	0 **(0)**	
C	III	4 **(16)**	2 **(4)**	-6 **(36)**	0 **(0)**	
C	IV	-8 **(64)**	-4 **(16)**	12 **(144)**	0 **(0)**	
H	V	16 **(256)**	8 **(64)**	-24 **(576)**	0 **(0)**	
I	Totale					0 **(3696)**

La devianza della non additività è determinata dalle relazioni tra due serie di residui o scarti dai valori medi di riga e di colonna.

La somma di questi ultimi quadrati (tra parentesi e in grassetto) determina il valore **Q**

$$Q = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{k}\left(q_{ij} - \hat{q}_{ij}\right)^2 = 3696$$

La somma del prodotto delle due tabelle dei residui

		TRATTAMENTI				
B		A	B	C	D	Totale
L	I	(-1 · -24) **24**	(-3 · -12) **36**	(2 · 36) **72**	(2 · 0) **0**	
O	II	(3 · 12) **36**	(-5 · 6) **–30**	(6 · -18) **–108**	(-4 · 0) **0**	
C	III	(-2 · 4) **-8**	(3 · 2) **6**	(-1 · -6) **6**	(0 · 0) **0**	
C	IV	(1 · -8) **-8**	(5 · -4) **–20**	(-2 · 12) **-24**	(-4 · 0) **0**	
H	V	(-1 · 16) **-16**	(0 · 8) **0**	(-5 · -24) **120**	(6 · 0) **0**	
I	Totale					**86**

determina il valore di **P**

$$P = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{k}\left(x_{ij} - \overline{x}_{ij}\right)\cdot\left(q_{ij} - \hat{q}_{ij}\right) = 86$$

Essi permettono di stimare la **devianza della non-additività o di interazione SQ_{AB}** attraverso il rapporto

$$SQ_{AB} = \frac{P^2}{Q} = \frac{(86)^2}{3696} = 2{,}001$$

La procedura, secondo le parole di Tukey, spiega perché questa devianza abbia solo 1 gdl: è ricavata dal prodotto delle deviazioni dalle medie di riga e dalle medie di colonna, la cui somma deve essere uguale a 0 sia per riga che per colonna, pertanto è 1 gdl ortogonale sia alle righe che alle colonne.

La devianza d'errore $\mathbf{SQ_e}$ può essere scomposta

- nella devianza d'interazione o di non additività trasformabile e
- nella devianza remainder o balance

Devianza		DF	Varianza
Errore	226,0	12	---
Non-additività	2,001	1	2,001
Remainder	223,999	11	20,364

Infine si deve applicare il test F, per verificare se la varianza della non-additività è significativa

$$F_{1,11} = \frac{2{,}001}{20{,}364}$$

In questo caso è inutile, in quanto il rapporto è inferiore a 1 e quindi il suo valore certamente non è significativo.

L'articolo di Tukey illustra anche come la presenza di dati anomali renda significativa la varianza della non-additività e come essa sia nulla quando la distribuzione è perfettamente normale.

ESEMPIO 2 (FORMULA ABBREVIATA CON MEDIE). Nel testo di John **Neter**, Michael H. **Kutner**, Christopher J. **Nachtsheim** e William **Wasserman** del 1996 (***Applied Linear Statistical Models***, 4th ed. WCB McGraw-Hill, Boston, pp. 1408) è riportato un esempio elementare, più scolastico che reale a causa dei pochi df, ma utile per illustrare la procedura con una formula abbreviata.

In un esperimento con 3 livelli dei trattamenti (A) e 2 livelli dei blocchi (B)

	Trattamenti			
	1	2	3	Media $\overline{x}_j$
Blocco I	140	210	220	190
Blocco II	100	180	200	160
Media $\overline{x}_i$	120	195	210	$\overline{\overline{x}} = 175$

l'ANOVA ha dato i seguenti risultati

Devianza		DF	Varianza
Totale	11.750	5	----
SQ_A	9.300	2	4.650
SQ_B	1.350	1	1.350
Errore	100	2	50

In un disegno a due criteri (A e B) aventi k trattamenti e p blocchi, la devianza d'interazione $\mathbf{SQ_{AB}}$ con la formula abbreviata

$$SQ_{AB} = \frac{\left[\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p}\left(\overline{X}_i - \overline{\overline{X}}\right)\cdot\left(\overline{X}_j - \overline{\overline{X}}\right)\cdot X_{ij}\right]^2}{\frac{SQ_A}{p}\cdot\frac{SQ_B}{k}}$$

dove con i dati dell'esempio il numeratore è

$$\left[(120-175)\cdot(190-175)\cdot 140 + \ldots + (210-175)\cdot(160-175)\cdot 200\right]^2 = (-13.500)^2$$

e il denominatore è

$SQ_A = 9.300 \quad SQ_B = 1.350 \quad p = 2 \quad k = 3$

risulta

$$SQ_{AB} = \frac{(-13.500)^2}{\frac{9.300}{2}\cdot\frac{1.350}{3}} = 87{,}1$$

uguale a 87,1 con df = 1.

Poiché la devianza d'errore è risultata $SQ_e = 100$ con df = 2

La devianza remainder SQ_{Rem} è

$$100 - 87{,}1 = 12{,}9$$

uguale a 12,9 con df = 1.

Per verificare l'ipotesi nulla

H_0: D = 0 (non esiste l'interazione tra i fattori A e B)

contro l'ipotesi alternativa bilaterale

H_1: D ≠ 0 (esiste interazione tra i fattori A e B)

il testo citato propone il test **F**

$$F_{1,1} = \frac{87,1}{12,9} = 6,75$$

che non risulta significativo nemmeno alla probabilità $\alpha = 0.10$ benché la devianza d'interazione sia quasi 7 volte quella remainder.

Infatti l'esempio riportato in questo testo internazionale ha un numero di gdl troppo ridotto, per una valutazione attendibile dei parametri in gioco.

ESEMPIO 3 (FORMULA ABBREVIATA CON TOTALE) Nel testo di Douglas C. **Montgomery** del 1976 (***Design and Analysis of Experiments***. John Wiley & Sons, New York, pp. 418) è proposta una formula ancor più rapida, applicata ad un esempio che permette di avere un numero minimo accettabile di df.

In una rilevazione dei livelli d'inquinamento in 5 località per 3 tempi

	Località					
	A	B	C	D	E	Totali T_j
Tempo I	5	4	6	3	5	23
Tempo II	3	1	4	2	3	13
Tempo III	1	1	3	1	2	8
Totali T_i	9	6	13	6	10	$T = 44$

l'ANOVA ha dato o seguenti risultati

Devianza		DF	Varianza
Totale	36,93	14	----
Località (tratt.)	11,60	4	2,90
Tempi (blocchi)	23,33	2	11,67
Errore	2,00	8	0,25

Per calcolare la devianza della non-additività, con la solita simbologia

la formula rapida proposta è

$$SQ_{non-add} = \frac{\left[\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p} X_{ij} \cdot T_i \cdot T_j - T\left(SQ_{tratt} + SQ_{blocc} + \frac{T^2}{k \cdot p}\right)\right]^2}{k \cdot p \cdot SQ_{tratt} \cdot SQ_{blocc}}$$

Utilizzando i dati dell'esempio, dopo aver calcolato

$$\sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{p} X_{ij} \cdot T_i \cdot T_j = 5 \cdot 23 \cdot 9 + 4 \cdot 23 \cdot 6 + \ldots + 1 \cdot 8 \cdot 6 + 2 \cdot 8 \cdot 10 = 7236$$

si ricava

$$SQ_{non-add} = \frac{\left[7236 - 44 \cdot \left(23{,}33 + 11{,}6 + \frac{44^2}{5 \cdot 3}\right)\right]^2}{5 \cdot 3 \cdot 23{,}33 \cdot 11{,}6} = \frac{(7236 - 44 \cdot 164)^2}{4059{,}42} = 0{,}0985$$

$SQ_{non\text{-}add} = 0{,}0985$

e infine la devianza remainder

$$SQ_{\mathrm{Re}m} = 2 - 0{,}0985 = 1{,}9015$$

che risulta $SQ_{Rem} = 1{,}9015$ con df 7.

Per la verifica della significatività della non-additività o interazione, dopo aver calcolato le varianze

Devianza		DF	Varianza
Errore	2,0000	8	---
Non-additività	0,0985	1	0,0985
Remainder	1,9015	7	0,2716

si applica il test F

$$F_{1,1} = \frac{0{,}0985}{0{,}2716} = 0{,}36$$

che risulta addirittura inferiore a 1. In questo caso, per la verifica della significatività delle differenze tra le medie dei trattamenti e quella dei blocchi è conveniente (avendo una varianza d'errore inferiore e numero di gdl maggiore) , oltre che corretto, utilizzare la procedura classica.

12.9. QUADRATI LATINI CON REPLICHE

Nella presentazione del disegno sperimentale a quadrati latini è stato ripetutamente evidenziato il suo limite operativo, imposto dall'esigenza che i tre fattori a confronto abbiano lo stesso numero di livelli. Di conseguenza, si è indotti ad effettuare esperimenti di piccole dimensioni, con la forte controindicazione che il numero di df dell'errore è molto piccolo: in un esperimento 3 x 3, i test F relativi alla significatività di ognuno dei tre fattori hanno df 2 e 2.

Spesso è **utile applicare forme di repliche, che aumentino i df dell'errore**: con df 2 e 2 alla probabilità $\alpha = 0.05$ il valore critico è uguale a 18,51 e alla probabilità $\alpha = 0.01$ è uguale a 99,00; già con df 2 e 4 i due valori critici si abbassano rispettivamente a 6,94 e 18,00 rendendo significative differenze che sono circa 1/3 e 1/5 delle prime.

Le modalità con cui si possono avere repliche di quadrati latini, soprattutto in esperimenti di laboratorio, sono numerose. A volte è possibile ripetere l'esperimento utilizzando le stesse cavie, altre volte ricorrendo a cavie appartenenti alla medesima nidiata, sempre distribuite nelle caselle in modo casuale. Negli esperimenti in natura, è possibile **ripetere l'esperimento** in altra località, **con una diversa distribuzione casuale dei fattori**.

In un esperimento con 2 differenti quadrati 3 x 3, estratti a caso dai 12 possibili determinati dalla diversa distribuzione del terzo fattore nelle 9 caselle, si ottengono 18 osservazioni. L'analisi separata dei 2 quadrati, ognuno con 9 osservazioni, facilmente porterebbe a conclusioni non significative per entrambi gli esperimenti.

L'analisi combinata consente

- **una stima della devianza d'errore e della significatività dei due fattori di disturbo con 4 df anziché 2;**
- **l'effetto del fattore ritenuto più importante è saggiato sul numero totale di osservazioni ottenute con i due esperimenti;**
- **infine è possibile l'analisi dell'interazione tra il fattore principale e le repliche, al fine di saggiare eventuali risultati diversi ottenuti con i due quadrati.**
- Se questa ultima interazione risulta significativa, è corretto analizzare separatamente i fattori nei due quadrati, con l'impostazione già presentata nei paragrafi precedenti; se non risulta significativa, è conveniente la loro analisi combinata.

In un disegno sperimentale con **q repliche di un quadrato latino di dimensioni n** è possibile calcolare le devianze sottoriportate, con i relativi df.

DEVIANZE	DF
TOTALE	$q\ (n^2 - 1)$
Tra quadrati	$q - 1$
Fattore X entro quadrati	$q\ (n - 1)$
Fattore Y entro quadrati	$q\ (n - 1)$
Trattamenti entro quadrati	$q\ (n - 1)$
Trattamenti	**$n - 1$**
Interazione trattamenti x quadrati	**$(q - 1)\ (n - 1)$**
Errore	$q\ (n - 1)\ (n - 2)$

La **devianza tra trattamenti entro quadrati ed i suoi df possono essere scomposti** in due parti:

- la **devianza tra trattamenti con df n-1**, con la quale si saggiano le differenze complessive tra le modalità dei trattamenti, senza considerare le differenze tra i due quadrati latini, ma valutando i dati come risultato di un unico esperimento;
- la devianza **d'interazione trattamenti x quadrati con df (q-1) (n-1),** con la quale si verifica se il fattore in esame, quello ritenuto più importante dei tre sotto controllo, determina risultati significativamente diversi nei due quadrati.

ESEMPIO. Si intende saggiare la quantità di produzione unitaria di tre varietà dello stesso cereale (Z), considerando anche gli effetti di tre concimi (X) e di tre tipi di aratura (Y).

Per avere un numero di dati sufficientemente alto e per considerare anche l'effetto della località, sono stati impostati due esperimenti a quadrati latini: uno in pianura e l'altro in montagna, con i risultati che sono stati riportati nelle due tabelle.

	PIANURA		
	X_1	X_2	X_3
Y_1	**B 18**	**A 12**	**C 17**
Y_2	**A 14**	**C 21**	**B 20**
Y_3	**C 18**	**B 16**	**A 12**

	MONTAGNA		
	X_1	X_2	X_3
Y_1	**C 23**	**A 16**	**B 22**
Y_2	**A 18**	**B 24**	**C 27**
Y_3	**B 20**	**C 20**	**A 15**

Calcolare le devianze dei tre fattori e la devianza d'interazione delle varietà del cereale per località.

Risposta. Separatamente per i due quadrati latini riportati di seguito

	PIANURA			
	X_1	**X_2**	**X_3**	**Totale**
Y_1	B 18	A 12	C 17	**47**
Y_2	A 14	C 21	B 20	**55**
Y_3	C 18	B 16	A 12	**46**
Totale	**50**	**49**	**49**	**148**

	MONTAGNA			
	X_1	**X_2**	**X_3**	**Totale**
Y_1	C 23	A 16	B 22	**61**
Y_2	A 18	B 24	C 27	**69**
Y_3	B 20	C 20	A 15	**55**
Totale	**61**	**60**	**64**	**185**

e congiuntamente per le sementi si calcolano i totali

	SEMENTI			
	A	**B**	**C**	**Totale**
Pianura	**38**	**54**	**56**	**148**
Montagna	**49**	**66**	**70**	**185**
Totale	**87**	**120**	**126**	**333**

Con le solite modalità già illustrate per i quadrati latini, si possono ottenere le devianze e i df sia per l'esperimento in pianura che per quello in montagna.

	PIANURA		MONTAGNA	
	DEVIANZA	DF	DEVIANZA	DF
Tra dosi di X	0,22	2	2,89	2
Tra dosi di Y	16,22	2	32,89	2
Tra sementi	64,89	2	82,89	2
Errore	132,67	2	1,55	2
Totale	214,00	8	120,22	8

Mediante l'analisi congiunta dei due quadrati latini è possibile calcolare:

- la **devianza totale**, che è uguale alla somma degli scarti al quadrato di ognuno dei 18 valori dalla media generale, e può essere ottenuta come

$$\sum x_{ijk}^2 - \left(\sum x_{ijk}\right)^2 /\text{n}$$

(con n = 18 nel caso dell'esempio);
il valore calcolato è 410,28 con 17 df;

- la **devianza tra quadrati** (o tra località)

$$\frac{148^2}{9} + \frac{185^2}{9} - \frac{333^2}{18} = 2433{,}78 + 3802{,}78 - 6160{,}5 = 76{,}06$$

che risulta uguale a 76,06 con 1 df;

- la **devianza tra sostanza X entro località**, o entro quadrati,

$$\left(\frac{50^2}{3}+\frac{49^2}{3}+\frac{49^2}{3}-\frac{148^2}{9}\right)+\left(\frac{61^2}{3}+\frac{60^2}{3}+\frac{64^2}{3}-\frac{185^2}{9}\right)$$

che ovviamente coincide con la somma delle due devianze del fattore X calcolate entro ogni quadrato

$$0{,}22 + 2{,}89 = 3{,}11$$

e risulta uguale a 3,11 con 4 df (2 + 2);

- la **devianza tra sostanza Y entro località**

$$\left(\frac{47^2}{3}+\frac{55^2}{3}+\frac{46^2}{3}-\frac{148^2}{9}\right)+\left(\frac{61^2}{3}+\frac{69^2}{3}+\frac{55^2}{3}-\frac{185^2}{9}\right)$$

che coincide con la somma delle due devianze calcolate separatamente

$$16{,}22 + 32{,}89 = 49{,}11$$

e risulta uguale a 49,11 con 4 df;

- la **devianza tra sementi entro località**

$$\left(\frac{38^2}{3}+\frac{54^2}{3}+\frac{56^2}{3}-\frac{148^2}{9}\right)+\left(\frac{49^2}{3}+\frac{66^2}{3}+\frac{70^2}{3}-\frac{185^2}{9}\right)$$

che coincide con la somma delle due devianze relative

$$64{,}89 + 82{,}89 = 147{,}78$$

e risulta uguale a 147,78 con 4 df.

Questa ultima devianza calcolata entro quadrati, in particolare quando si considerano le sementi come il fattore più importante e gli altre due fattori come fonti di perturbazione da controllare, può essere suddivisa in due devianze:

- la **devianza tra sementi**

$$\frac{87^2}{6}+\frac{120^2}{6}+\frac{126^2}{6}-\frac{333^2}{18} = 1261{,}5 + 2400 + 2646 - 6160{,}5 = 147$$

che risulta uguale a 147 ed ha 2 df;

- la **devianza d'interazione sementi x località**

che è ottenuta per differenza

dev. tra sementi entro località - dev. tra sementi = dev. d'interazione sementi x località

$$147{,}78 - 147 = 0{,}78$$

e che, con i dati dell'esempio, risulta uguale a 0,78 ed ha 2 df.

Questa scomposizione potrebbe essere fatta contemporaneamente per tutti e tre i fattori.

Infine si calcola la devianza d'errore, che può essere facilmente ottenuta come somma delle due devianze d'errore calcolate in ogni quadrato:

con i dati dell'esempio

$$132{,}67 + 1{,}55 = 134{,}22$$

risulta uguale a 134,22 ed ha 4 df.

E' sempre utile presentare tutte le devianze in una tabella

FATTORI E INTERAZIONI	DEVIANZA	DF	VARIANZA
Totale	410,28	17	---
Tra località	76,06	1	76,06
Fattore X entro località	3,11	4	0,78
Fattore Y entro località	49,11	4	12,28
Sementi entro località	147,78	4	36,94
Sementi	**147**	**2**	**73,5**
Interazione sementi x località	**0,78**	**2**	**0,39**
Residuo	134,22	4	33,55

che riassume i risultati di tutti i calcoli effettuati ed eventualmente la significatività di ogni test F.

12.10. LETTURA DI UN TABULATO INFORMATICO

Sono riportati due tabulati di calcolatore su esempi già discussi nel capitolo.

ESEMPIO. Si vuole verificare se insetti adulti della stessa specie che vivono in 4 località differenti (A, B, C, D) hanno differenze significative nelle loro dimensioni, considerando pure che dalla primavera all'autunno continuano ad aumentare.

	LOCALITA'			
	A	**B**	**C**	**D**
Primavera	**45**	**63**	**70**	**48**
	50	**57**	**65**	**52**
Estate	**57**	**77**	**74**	**60**
	65	**69**	**80**	**56**
Autunno	**70**	**82**	**88**	**70**
	79	**75**	**82**	**77**

Risposta

General Linear Models Procedure

1)

Class	Levels	Values
STAGIONE	3	autunno estate primaver
LOCALITA	4	a b c d

Number of observations in data set = 24

2)

Dependent Variable: INSETTI

Source	DF	Sum of Squares	F Value	Pr > F
Model	11	3052.12500000	13.40	0.0001
Error	12	248.50000000		
Corrected Total	23	3300.62500000		

R-Square	C.V.	INSETTI Mean
0.924711	6.779353	67.1250000

Source	DF	Type I SS	F Value	Pr > F
STAGIONE	2	1870.75000000	45.17	0.0001
LOCALITA	3	1084.12500000	17.45	0.0001
STAGIONE*LOCALITA	6	97.25000000	0.78	0.5995

Source	DF	Type III SS	F Value	Pr > F
STAGIONE	2	1870.75000000	45.17	0.0001
LOCALITA	3	1084.12500000	17.45	0.0001
STAGIONE*LOCALITA	6	97.25000000	0.78	0.5995

3)

Tukey's Studentized Range (HSD) Test for variable: INSETTI

NOTE: This test controls the type I experimentwise error rate.

Alpha= 0.05 Confidence= 0.95 df= 12 MSE= 20.70833
Critical Value of Studentized Range= 3.773
Minimum Significant Difference= 6.07

Comparisons significant at the 0.05 level are indicated by '***'.

STAGIONE Comparison	Simultaneous Lower Confidence Limit	Difference Between Means	Simultaneous Upper Confidence Limit	
autunno - estate	4.555	11.625	16.695	***
autunno - primaver	15.555	21.625	27.695	***
estate - autunno	-16.695	-11.625	-4.555	***
estate - primaver	4.930	11.000	17.070	***
primaver - autunno	-27.695	-21.625	-15.555	***
primaver - estate	-17.070	-11.000	-4.930	***

4)

Scheffe's test for variable: INSETTI

NOTE: This test controls the type I experimentwise error rate
but generally has a higher type II error rate than Tukey's
for all pairwise comparisons.

Alpha= 0.05 Confidence= 0.95 df= 12 MSE= 20.70833
Critical Value of F= 3.88529
Minimum Significant Difference= 6.3426

Comparisons significant at the 0.05 level are indicated by '***'.

STAGIONE Comparison	Simultaneous Lower Confidence Limit	Difference Between Means	Simultaneous Upper Confidence Limit	
autunno - estate	4.282	11.625	16.968	***
autunno - primaver	15.282	21.625	27.968	***
estate - autunno	-16.968	-11.625	-4.282	***
estate - primaver	4.657	11.000	17.343	***
primaver - autunno	-27.968	-21.625	-15.282	***
primaver - estate	-17.343	-11.000	-4.657	***

5)

Dunnett's T tests for variable: INSETTI

NOTE: This tests controls the type I experimentwise error for comparisons of all treatments against a control.

Alpha= 0.05 Confidence= 0.95 df= 12 MSE= 20.70833
Critical Value of Dunnett's T= 2.502
Minimum Significant Difference= 5.6938

Comparisons significant at the 0.05 level are indicated by '***'.

STAGIONE Comparison	Simultaneous Lower Confidence Limit	Difference Between Means	Simultaneous Upper Confidence Limit	
estate - autunno	-16.319	-11.625	-4.931	***
primaver - autunno	-27.319	-21.625	-15.931	***

6)

Student-Newman-Keuls test for variable: INSETTI

NOTE: This test controls the type I experimentwise error rate under the complete null hypothesis but not under partial null hypotheses.

Alpha= 0.05 df= 12 MSE= 20.70833

Number of Means	2	3
Critical Range	4.9574623	6.0700016

Means with the same letter are not significantly different.

SNK Grouping	Mean	N	STAGIONE
A	77.875	8	autunno
B	67.250	8	estate
C	56.250	8	primavera

7)

Tukey's Studentized Range (HSD) Test for variable: INSETTI

NOTE: This test controls the type I experimentwise error rate,
but generally has a higher type II error rate than REGWQ.

Alpha= 0.05 df= 12 MSE= 20.70833
Critical Value of Studentized Range= 3.773
Minimum Significant Difference= 6.07

Means with the same letter are not significantly different.

Tukey Grouping	Mean	N	STAGIONE
A	77.875	8	autunno
B	67.250	8	estate
C	56.250	8	primavera

8)

Scheffe's test for variable: INSETTI

NOTE: This test controls the type I experimentwise error rate
but generally has a higher type II error rate than REGWF
for all pairwise comparisons

Alpha= 0.05 df= 12 MSE= 20.70833
Critical Value of F= 3.88529
Minimum Significant Difference= 6.3426

Means with the same letter are not significantly different.

Scheffe Grouping	Mean	N	STAGIONE
A	77.875	8	autunno
B	67.250	8	estate
C	56.250	8	primavera

9)

Tukey's Studentized Range (HSD) Test for variable: INSETTI

NOTE: This test controls the type I experimentwise error rate.

Alpha= 0.05 Confidence= 0.95 df= 12 MSE= 20.70833
Critical Value of Studentized Range= 4.199
Minimum Significant Difference= 7.8

Comparisons significant at the 0.05 level are indicated by '***'.

LOCALITA Comparison	Simultaneous Lower Confidence Limit	Difference Between Means	Simultaneous Upper Confidence Limit	
c - b	-1.800	6.000	13.800	
c - a	7.700	15.500	23.300	***
c - d	8.200	16.000	23.800	***
b - c	-13.800	-6.000	1.800	
b - a	1.700	9.500	17.300	***
b - d	2.200	11.000	17.800	***
a - c	-23.300	-15.500	-7.700	***
a - b	-17.300	-9.500	-1.700	***
a - d	-7.300	0.500	8.300	
d - c	-23.800	-16.000	-8.200	***
d - b	-17.800	-11.000	-2.200	***
d - a	-8.300	-0.500	7.300	

10)

Scheffe's test for variable: INSETTI

NOTE: This test controls the type I experimentwise error rate
but generally has a higher type II error rate than Tukey's
for all pairwise comparisons.

Alpha= 0.05 Confidence= 0.95 df= 12 MSE= 20.70833
Critical Value of F= 3.49029
Minimum Significant Difference= 8.5017

Comparisons significant at the 0.05 level are indicated by '***'.

LOCALITA Comparison	Simultaneous Lower Confidence Limit	Difference Between Means	Simultaneous Upper Confidence Limit	
c - b	-2.502	6.000	14.502	
c - a	6.998	15.500	24.002	***
c - d	7.498	16.000	24.502	***
b - c	-14.502	-6.000	2.502	
b - a	0.998	9.500	18.002	***
b - d	1.498	11.000	18.502	***
a - c	-24.002	-15.500	-6.998	***
a - b	-18.002	-9.500	-0.998	***
a - d	-8.002	0.500	9.002	
d - c	-24.502	-16.000	-7.498	***
d - b	-18.502	-11.000	-1.498	***
d - a	-9.002	-0.500	8.002	

11)

Dunnett's T tests for variable: INSETTI

NOTE: This tests controls the type I experimentwise error for comparisons of all treatments against a control.

Alpha= 0.05 Confidence= 0.95 df= 12 MSE= 20.70833
Critical Value of Dunnett's T= 2.683
Minimum Significant Difference= 7.0489

Comparisons significant at the 0.05 level are indicated by '***'.

LOCALITA Comparison	Simultaneous Lower Confidence Limit	Difference Between Means	Simultaneous Upper Confidence Limit	
c - a	8.451	15.500	22.549	***
b - a	2.451	9.500	16.549	***
d - a	-7.549	-0.500	6.549	

12)

Student-Newman-Keuls test for variable: INSETTI

NOTE: This test controls the type I experimentwise error rate under the complete null hypothesis but not under partial null hypotheses.

Alpha= 0.05 df= 12 MSE= 20.70833

Number of Means	2	3	4
Critical Range	5.7243844	7.0090341	7.8000392

Means with the same letter are not significantly different.

SNK Grouping	Mean	N	LOCALITA
A	76.500	6	c
B	70.500	6	b
C	61.000	6	a
C			
C	60.500	6	d

13)

Tukey's Studentized Range (HSD) Test for variable: INSETTI

NOTE: This test controls the type I experimentwise error rate,
but generally has a higher type II error rate than REGWQ.

Alpha= 0.05 df= 12 MSE= 20.70833
Critical Value of Studentized Range= 4.199
Minimum Significant Difference= 7.8

Means with the same letter are not significantly different.

Tukey Grouping	Mean	N	LOCALITA
A	76.500	6	c
A			
A	70.500	6	b
B	61.000	6	a
B			
B	60.500	6	d

14)

Scheffe's test for variable: INSETTI

NOTE: This test controls the type I experimentwise error rate
but generally has a higher type II error rate than REGWF
for all pairwise comparisons

Alpha= 0.05 df= 12 MSE= 20.70833
Critical Value of F= 3.49029
Minimum Significant Difference= 8.5017

Means with the same letter are not significantly different.

Scheffe Grouping	Mean	N	LOCALITA
A	76.500	6	c
A			
A	70.500	6	b
B	61.000	6	a
B			
B	60.500	6	d

Level of STAGIONE	Level of LOCALITA	N	INSETTI Mean	INSETTI SD
autunno	a	2	74.5000000	6.36396103
autunno	b	2	78.5000000	4.94974747
autunno	c	2	85.0000000	4.24264069
autunno	d	2	73.5000000	4.94974747
estate	a	2	61.0000000	5.65685425
estate	b	2	73.0000000	5.65685425
estate	c	2	77.0000000	4.24264069
estate	d	2	58.0000000	2.82842712
primaver	a	2	47.5000000	3.53553391
primaver	b	2	60.0000000	4.24264069
primaver	c	2	67.5000000	3.53553391
primaver	d	2	50.0000000	2.82842712